İntegral alma (Türevin Tersi)

Türevi belli olan bir fonksiyonun kendisini bulma işlemine integral alma işlemi denir.

(Biz buna türevin tersi de diyebiliriz.)

$\int$ işareti de integral sembolüdür.

Örnek:

x^2+5x+3 ün türevi $\rightarrow$ $2x+5$ tir.

Buna göre,

$$\int \underbrace{(2x+5)}_{\text{Türev}} \underbrace{dx}_{\text{Türevin x e göre alındığını anlıyoruz.}} = x^2+5x+\underbrace{c}_{\text{integral sabiti (Değerini bilmiyo-ruz)}} \quad \text{dir.}$$

Diferansiyel

$y=f(x)$ fonksiyonunun türevini $\frac{dy}{dx}=f'(x)$ olarak gösterebiliyorduk.

$\frac{d(f(x))}{dx}=f'(x)$ olarak yazabiliriz. dx i karşıya atarsak

$d(f(x))=f'(x).dx$ olur.

İşte bu ifadeye f(x) in **diferansiyeli** denir.

Örnek:

$f(x)=x^3+2x$ ve $g(t)=t^2+1$ olsun.

f(x) in diferansiyeli $\Rightarrow$ $d(f(x))=\overbrace{(3x^2+2)}^{\text{f(x) in türevi}}.\overbrace{dx}^{\text{Türev değişkeni}}$ tir.

g(t) nin diferansiyeli $\Rightarrow$ $d(g(t))=\overbrace{(2t)}^{\text{f(x) in türevi}}.\overbrace{dt}^{\text{Türev değişkeni}}$ tir.

Not:

İntegralin sonucunda hep bir c sabiti olur.

Çünkü, türevini alınca bu ifade kayboluyor.

Bunun değerini bilmediğimiz için, yerine c yazıyoruz.

Örnek:

$d(f(x))=(2x+1)dx$ ise f(x) nedir?

Çözüm:

$d(f(x))=\underbrace{(2x+1)}_{\text{f(x) in türevi}}dx$

x^2 nin türevi 2x tir.

x in türevi 1 dir. Buna göre,

$f(x)=\int(2x+1)dx=x^2+x+c$ dir.

Not:

"c" integral sabitinin değerini bilmediğimiz için bu integrale **Belirsiz İntegral** denir.

Not:

Hangi değişkene göre türev alınmışsa, o değişkene göre integral almalıyız.

Örnek:

$\int x dx=\frac{x^2}{2}+c$

$\int 5dx=5x+c$

$\int 5dt=5t+c$

$\int x dt=xt+c$ dir.

Not: $\overbrace{\int \square dx}^{\text{İntegrali}\rightarrow}=\underbrace{\square}_{\leftarrow\text{Türevi}}$

Örnek:

$\int(ax^2+b)dx=2x^3+5x+1$ olduğuna göre, $a+b=?$

Çözüm:

$2x^3+5x+1$ in türevi integralin içinde olmalıdır.

Türevi $\Rightarrow$ $6x^2+5=\underbrace{a}_{6}x+\underbrace{b}_{5}$ $\Rightarrow$ $a+b=11$ buluruz.

Not:

$\frac{d}{dx}\int f(x)dx=f(x)$ tir.

Bir fonksiyonun integralinin türevi, yine fonksiyonun kendisine eşittir (İntegral ve türevde aynı değişken kullanılırsa).

Örnek:

$\frac{d}{dx}\int(x^2+\sin x)dx=?$

Çözüm:

İçerdeki ifade aynen çıkar.

$\frac{d}{dx}\int(x^2+\sin x)dx=x^2+\sin x$ tir.

Örnek:

$\frac{d}{dt}\int(x^2+2)dx=?$

Çözüm:

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\int(x^2+2)dx}_{\text{t değişkeni gelmeyeceği için, bir sabitin türevini alıyormuş gibi yapacağız.}} = 0 \quad \text{dır.}$$

Not:

f(x) in diferansiyeli $\Rightarrow$ $d(f(x)) = f'(x).dx$ idi.

O halde, $d\int f(x).dx = \left(\int f(x).dx\right)'.dx$

$= f(x).dx$ tir.

Yani "d" ifadesi sadece integral işaretini ortadan kaldırır, dx kalır. $\cancel{d}\cancel{\int} f(x)dx$

Örnek:

$d\int(x^3+x)dx = ?$

Çözüm:

Sadece integral işareti kalkar.

$d\int(x^3+x)dx = (x^3+x)dx$ olur.

Not:

$\int d(f(x)) = f(x)+c$ dir.

Çünkü $d(f(x)) = f'(x).dx$ idi.

İntegralini alırsak $f(x)+c$ olur.

Örnek:

$f(x) = \int d(x^2+2x)$ ve $f(1)=4$ olduğuna göre, f(2) kaçtır?

Çözüm:

$f(x) = \int d(x^2+2x)$

$= x^2+2x+c$ dir.

$f(1)=4$ ise $1+2+c=4 \Rightarrow x=1$ dir.

$f(x) = x^2+2x+1$ olur.

$f(2) = 4+4+1 = 9$ buluruz.

İntegral Alma Kuralları

n, -1 den farklı bir rasyonel sayı olsun.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}+c \quad \text{dir.}$$

Yani üssü bir artırız. Ayrıca yeni üs değerini bölü olarak yazarız.

Örnek:

$\int x^4 dx = ?$

Çözüm:

$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5}+c$ dir.

Örnek:

$\int \sqrt{x}dx = ?$

Çözüm:

$$\int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}+c \quad \text{dir.}$$

Örnek:

$\int \frac{1}{x^3}dx = ?$

Çözüm:

$$\int x^{-3}dx = \frac{x^{-2}}{-2}+c = -\frac{1}{2x^2}+c \quad \text{dir.}$$

Not:

k sabit bir reel sayı olsun.

$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ olarak k'yı integralin dışına alabiliriz.

Örnek:

$\int 9x^2 dx = ?$

Çözüm:

$$9\int x^2 dx = 9\frac{x^3}{3}+c = 3x^3+c \quad \text{dir.}$$

Not:

İntegralin, toplama veya çıkarma işlemi üzerine dağılma özelliği vardır.

$\int[f(x)\pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$ olarak ister ayrı ayrı integral alabiliriz, istersek de aynı integralin içinde çözebiliriz.

Örnek:

$\int 5x^2dx - \int 2x^2dx = ?$

Çözüm:

$\int 5x^2dx - \int 2x^2dx = \int 3x^2dx = 3\cdot\frac{x^3}{3} + c = x^3 + c$ dir.

Örnek:

$\int (x^2 + x + 1)dx = ?$

Çözüm:

$\int (x^2 + x + 1)dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + c$ dir.

Not:

Çarpma ve bölme işlemlerinde integralin dağılma özelliği yoktur. Yani ayrı ayrı integral alamayız.

Örnek:

$\int (x+1)(x-1)dx = ?$

Çözüm:

$\int (x^2 - 1)dx = \frac{x^3}{3} - x + c$ dir.

DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME YÖNTEMİ

Değişken değiştirme yöntemiyle, karışık olan ifadeleri daha basit hale getirebiliriz.

Örnek:

$\int (x^3 - 4)^6.3x^2dx = ?$

Çözüm:

$x^3 - 4 = u$ olsun. Diferansiyel alırsak,

$3x^2dx = du$ olur.

$\int (\underbrace{x^3 - 4}_{u})^6.\underbrace{3x^2dx}_{du} = \int u^6du = \frac{u^7}{7} + c = \frac{(x^3-4)^7}{7} + c$ dir.

Not:

$\int f^n(x)f'(x)dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c$ dir.

$(u = f(x)$ dönüşümü yapılarak bulunabilir.$)$

Örnek:

$\int 5.f^4(x).f'(x)dx = ?$

Çözüm:

$f(x) = u$ olsun. $\Rightarrow f'(x)dx = du$ olur.

$$\int 5.f^4(x).f'(x)dx = \int 5.u^4.du = 5\cdot\frac{u^5}{5} + c = u^5 + c$$
$$= f^5(x) + c \text{ dir.}$$

Not:

İntegralin içinde köklü ifade varsa, bu ifadeye kökten kurtulacak şekilde değişken vermek, kolaylık sağlayacaktır.

Yani $\sqrt[n]{f(x)}$ için $f(x) = u^n$ dersek, $\sqrt[n]{u^n} = u$ olarak çıkar.

Örnek:

$\int 4x\sqrt{x^2 - 1}.dx = ?$

Çözüm:

$x^2 - 1 = u^2$ olsun. $\Rightarrow 2xdx = 2udu \Rightarrow xdx = udu$ dur.

$$\int 4x\sqrt{x^2-1}.dx = \int 4.\sqrt{\underbrace{x^2-1}_{u^2}}.\underbrace{xdx}_{udu}$$
$$= \int 4.\sqrt{u^2}.u.du$$
$$= \int 4.u.u.du$$
$$= \int 4.u^2.du$$
$$= 4\cdot\frac{u^3}{3} + c$$
$$= 4\cdot\frac{\sqrt{(x^2-1)^3}}{3} + c \text{ dir.}$$

Not:

$$\int f'(g(x)).g'(x).dx = \int f'(u).du$$
$$= f(u) + c$$
$$= f(g(x)) + c$$
$$= (fog)(x) + c \text{ dir.}$$

Örnek:

$\int x^2.f'(x^3).dx = ?$

Çözüm:

$x^3 = u$ olsun. $3x^2dx = du \Rightarrow x^2dx = \frac{du}{3}$ olur.

$\int x^2.f'(x^3).dx = \frac{1}{3}\int f'(u).du = \frac{f(u)}{3} + c = \frac{f(x^3)}{3} + c$ dir.

BELİRLİ İNTEGRAL VE ÖZELLİKLERİ

f(x) fonksiyonu [a, b] aralığında türevlenebilir bir fonksiyon olsun.

$$\int_a^b f'(x)dx = f(x)\Big|_a^b = f(b) - f(a) \quad \text{dır.}$$

Bu integrale ise "**Belirli İntegral**" denir.

(Çıkarma işleminde "c" integral sabiti kaybolur.)

Örnek:

$$\int_2^6 (x-2)dx = ?$$

Çözüm:

$$\int_2^6 (x-2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_2^6 = \left(\frac{36}{2} - 12\right) - \left(\frac{4}{2} - 4\right)$$

$$= (18-12) - (2-4)$$

$$= 6 - (-2)$$

$$= 6 + 2$$

$$= 8 \text{ buluruz.}$$

Not:

a ve b birer reel sayı olmak üzere

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^b (f(x)dx\right] = 0 \text{ dır.}$$

Çünkü $\left[\int_a^b (f(x)dx\right]$ ifadesi sabit bir sayıya eşittir.

Bunun da türevi 0 olur.

Örnek:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_2^4 (x^3 - x)dx\right] = 0 \text{ dır.}$$

Not:

$\int_a^b (...)dx \Rightarrow$ a ve b değerleri x için kullanılacaktır.

$\int_a^b (...)dy \Rightarrow$ a ve b değerleri y için kullanılacaktır.

Örnek:

$$\int_2^4 (x^2+1)dy = ?$$

Çözüm:

$$\int_2^4 (x^2+1)dy = \left(x^2y + y\right)\Big|_2^4$$

$$= \left(4x^2+4\right) - \left(2x^2+2\right)$$

$$= 2x^2 + 2 \quad \text{dir.}$$

Not:

a ve b birer reel sayı olmak üzere,

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \quad \text{tir.}$$

Yani, sınır değerler yer değiştirirse sonuç, zıt işaretli olur.

Örnek:

$\int_2^5 f(x)dx = 14$ ise $\int_5^2 f(x)dx = -14$ tür.

Not:

k bir reel sayı olmak üzere,

$$\int_a^b k.f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx \quad \text{tir.}$$

Yani, katsayıyı integralin dışına alabiliriz.

Örnek:

$\int_1^6 f(x)dx = 12$ ise $\int_1^6 3f(x)dx = 36$ dır.

Not:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \text{ dır.}$$

Yani, sınır değerler aynı ise sonuç 0 dır.

Örnek:

$$\int_6^6 f(x)dx = 0 \text{ dır.}$$

Not:

www.matematikkolay.net

$$\int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx = \int_a^b \left[f(x) \pm g(x)\right]dx$$

Yani, sınır değerler aynı ise toplama veya çıkarma işlemini aynı integralde yapabiliriz.

Örnek:

$$\int_0^8 (x-3)dx + \int_0^8 (x+3)dx = ?$$

Çözüm:

$$\int_0^8 (x - \cancel{3} + x + \cancel{3})dx = \int_0^8 2xdx = x^2\Big|_0^8 = 64 - 0 = 64 \text{ tür.}$$

Not:

$a < c < b$ olmak üzere,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

şeklinde iki integrale ayırabiliriz.

Örnek:

$$\int_0^3 x^3dx + \int_3^4 x^3dx = ?$$

Çözüm:

$$\int_0^3 x^3dx + \int_3^4 x^3dx = \int_0^4 x^4dx = \frac{x^4}{4}\Big|_0^4 = \frac{4^4}{4} - \frac{0^4}{4} = 4^3 = 64 \text{ tür.}$$

Not:

f(x) tek fonksiyon ise $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$ dır.

(Çünkü integral alınınca çift fonksiyon ortaya çıkar. Hem a için hem de $-a$ için aynı değeri verir. Bu sebeple aradaki fark 0 dır.)

Örnek:

$$\int_{-500}^{500} (x^3 + x).dx = 0 \text{ dır.}$$

Not:

f(x) çift fonksiyon ise $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$ tir.

(Çünkü integral alınınca tek fonksiyon ortaya çıkar. $F(a) - \underbrace{F(-a)}_{-F(a)} = 2F(a)$ olur.)

Örnek:

$$\int_{-3}^{3} (x^2+1).dx = ?$$

Çözüm:

$$\int_{-3}^{3} (x^2+1).dx = 2\int_0^3 (x^2+1).dx$$

$$= 2\left[\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_0^3\right]$$

$$= 2\left[(9+3) - (0)\right]$$

$$= 24 \text{ tür.}$$

BELİRLİ İNTEGRALDE DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME

Belirli integralde değişken değiştirdikten sonra sınır değerleri de yeniden düzenlemeliyiz.

Örnek:

$$\int_0^1 (x^2+1)^5 2xdx = ?$$

Çözüm:

$x^2 + 1 = u$ dersek, $2xdx = du$ olur.

Sınır değerleri de ayarlayalım.

$x = 0$ için $u = \underbrace{x}_{0}^2 + 1 = 1$ dir.

$x = 1$ için $u = \underbrace{x}_{1}^2 + 1 = 2$ dir.

Buna göre,

$$\int_0^1 (\underbrace{x^2+1}_{u})^5 \underbrace{2xdx}_{du} = \int_1^2 u^5du$$

$$= \frac{u^6}{6}\Big|_1^2$$

$$= \frac{64}{6} - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{63}{6} = \frac{21}{2} \text{ buluruz.}$$

Belirli İntegralde Öteleme

Değişken değiştirerek de görebileceğimiz bu durumu kısaca şu şekilde ifade edebiliriz:

$$\underbrace{\int_{a-k}^{b-k} f(x+k)dx}_{\substack{u=x+k\\ du=dx\\ u_{alt}=a-k+k=a\\ u_{üst}=b-k+k=b\\ \int_a^b f(u)du}} = \underbrace{\int_{a+k}^{b+k} f(x-k)dx}_{\substack{u=x-k\\ du=dx\\ u_{alt}=a+k-k=a\\ u_{üst}=b+k-k=b\\ \int_a^b f(u)du}} = \int_a^b f(x)dx \quad \text{tir.}$$

Örnek:

$\int_0^5 f(x).dx = 10$ ise $\int_{-2}^{3} f(x+2).dx$ kaçtır?

Çözüm:

$u = x+2$ olsun. $du = dx$ olur.

Sınır değerler,

$x=-2$ için $u = \underbrace{x}_{-2} + 2 = 0$ dır.

$x=3$ için $u = \underbrace{x}_{3} + 2 = 5$ tir. O halde,

$$\int_{-2}^{3} f(x+2).dx = \int_0^5 f(u).du = 10 \text{ dur.}$$

Parçalı ve Mutlak Değerli Fonksiyonlarda İntegral

Parçalı fonksiyonların belirli integralini alırken kritik değerlere göre integrali parçalayıp, sonra integral almalıyız.

Örnek:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & , x<1 \\ 4x & , x \geq 1 \end{cases}$$ olduğuna göre,

$\int_0^3 f(x)dx$ integralinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$$\int_0^3 f(x)dx = \int_0^1 2xdx + \int_1^3 4xdx$$

$$= x^2\Big|_0^1 + 2x^2\Big|_1^3$$

$$= [1-0] + [18-2]$$

$$= 1+16$$

$$= 17 \quad \text{buluruz.}$$

Not:

Mutlak değer fonksiyonlarının belirli integralini alırken de kritik noktalara göre fonksiyonu parçalayıp sonra integral almalıyız.

Örnek:

$$\int_0^2 |2x-2|dx = ?$$

Çözüm:

$$\int_0^2 |2x-2|dx$$

$x=1$ den önce ve sonrası şeklinde ayırmalıyız.

$$\int_0^1 \underbrace{|2x-2|}_{\substack{\text{mutlak}\\ \text{değerin}\\ \text{içi } -}} dx + \int_1^2 \underbrace{|2x-2|}_{\substack{\text{mutlak}\\ \text{değerin}\\ \text{içi } +}} dx$$

$$\int_0^1 (-2x+2)dx + \int_1^2 (2x-2)dx$$

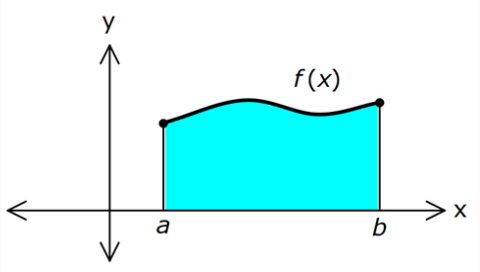
$$\left(-x^2+2x\right)\Big|_0^1 + \left(x^2-2x\right)\Big|_1^2$$

$$\left[(-1+2)-(0)\right] + \left[(4-4)-(1-2)\right]$$

$$[1] + [0-(-1)]$$

$$1+1=2 \quad \text{dir.}$$

İNTEGRALDE ALAN



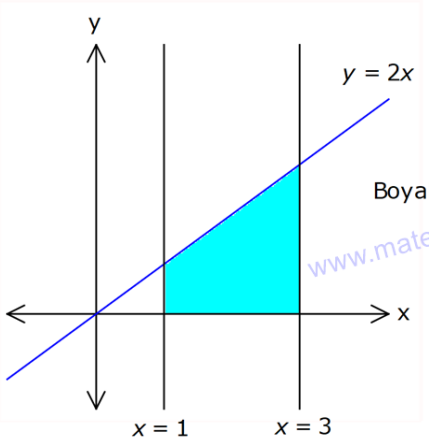
[a, b] kapalı aralığında f(x), integrali alınabilen bir fonksiyon olsun.

Bu aralıkta $f(x) \geq 0$ ise,

$x=a$, $x=b$ ve x ekseni ile arasındaki kapalı alan

$\int_a^b f(x)dx$ integrali ile bulunur.

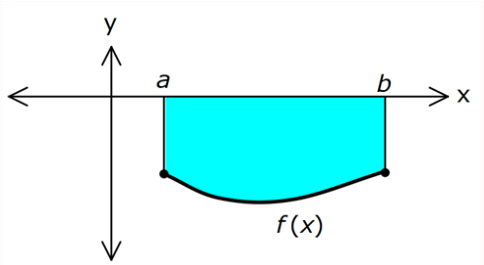
Örnek:



Çözüm:

$$\text{Boyalı bölge} = \int_1^3 2x\,dx = x^2\Big|_1^3$$
$$= 3^2 - 1^2$$
$$= 9 - 1$$
$$= 8 \text{ br}^2 \text{ dir.}$$

Not:



[a, b] kapalı aralığında f(x), integrali alınabilen bir fonksiyon olsun.

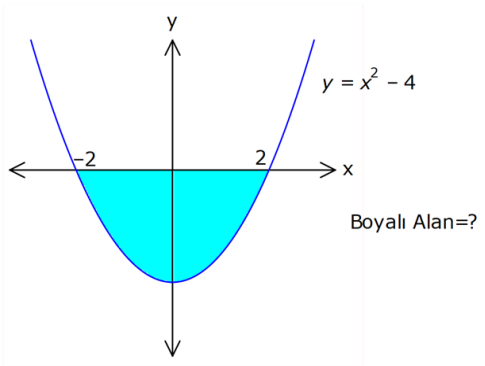
Bu aralıkta $f(x) \le 0$ ise,

$x = a$, $x = b$ ve x ekseni ile arasındaki kapalı alan

$-\int_a^b f(x)dx$ integrali ile bulunur.

Yani, x ekseninin altında integral negatif çıktığı için, alan hesabında bunu $-$ ile çarpmalıyız.

Örnek:



Çözüm:

$$\text{Boyalı bölge} = -\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)dx = -\left(\frac{x^3}{3} - 4x\right)\Bigg|_{-2}^{2}$$
$$= -\left[\left(\frac{8}{3} - 8\right) - \left(\frac{-8}{3} + 8\right)\right]$$
$$= -\left[\frac{8}{3} - 8 + \frac{8}{3} - 8\right]$$
$$= -\left[\frac{16}{3} - 16\right]$$
$$= -\left[-\frac{32}{3}\right]$$
$$= \frac{32}{3} \text{ br}^2 \text{ dir.}$$

Not:

Mutlak değeri kullanırsak,

$x = a$, $x = b$ ve x ekseni ile arasındaki kapalı alanı

kısaca $\int_a^b |f(x)|dx$ integrali ile ifade edebiliriz.

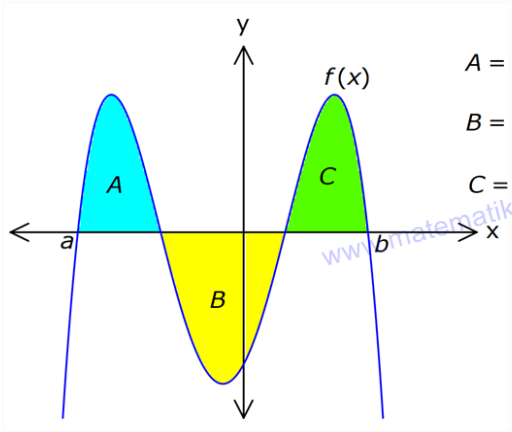
Not:

Alandan, integral değeri de bulunabilir.

x ekseninin üstündeki integral, alan değerine

x ekseninin altındaki integral ise, $-$alan değerine eşittir.

Örnek:



Grafiğe göre $\int_a^b f(x)dx$ integrali kaçtır?

Çözüm:

$$\int_a^b f(x)dx = A - \underbrace{B}_{\substack{\text{x ekseninin} \\ \text{altında integral} \\ \text{negatif çıkar}}} + C$$
$$= 4 - 6 + 3$$
$$= 7 - 6$$
$$= 1 \text{ dir.}$$

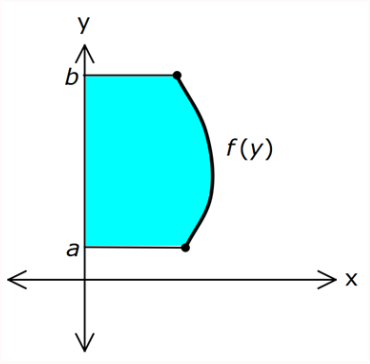
Not:

y ye göre integral aldığımızda, fonksiyonun y ekseni ile arasındaki alanı buluruz.

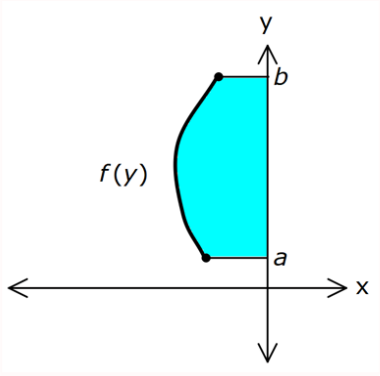
y ekseninin sağındaki alan $= \int_a^b f(y)dy$

y ekseninin solundaki alan $= -\int_a^b f(y)dy$ dir.

(a ve b değerleri y ekseni üzerindeki değerlerdir. $a < b$ dir.)

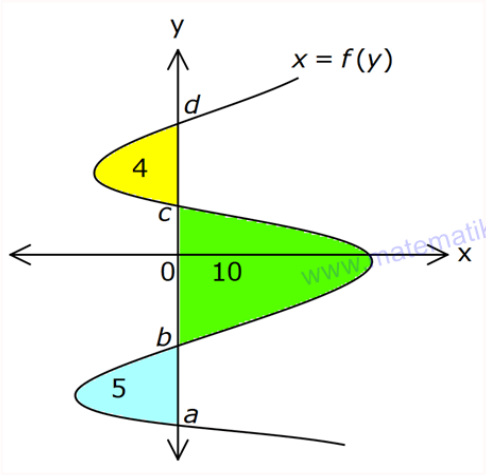


Boyalı Bölge $= \int_a^b f(y)dy$



Boyalı Bölge $= -\int_a^b f(y)dy$

Örnek:



Grafiğe göre $\int_a^d f(y)dy$ integrali kaçtır?

Örnek:

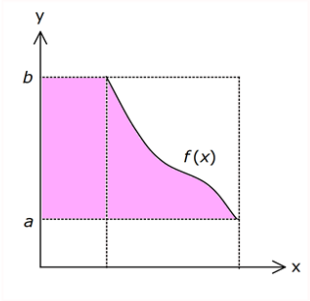
$\int_a^d f(y)dy = -5 + 10 - 4 = 10 - 9 = 1$ dir.

Not:

$\int_a^b f^{-1}(x)dx$

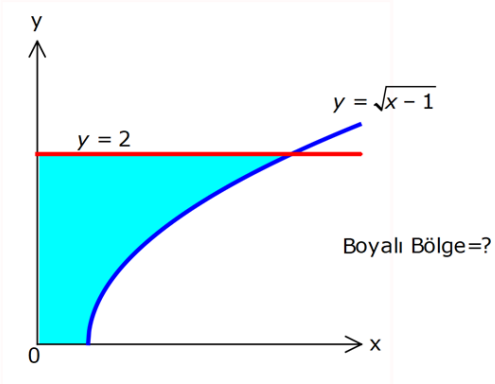
y ye göre integral almak ile ters fonksiyonun integralini almak aynı şeydir.

(a ve b değerleri y eksenine aittir. $a < b$ dir.)



Boyalı bölge $= \int_a^b f^{-1}(x)dx$

Örnek:



Çözüm:

$y = \sqrt{x-1}$

$y^2 = x - 1$

$y^2 + 1 = x \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 + 1$ dir.

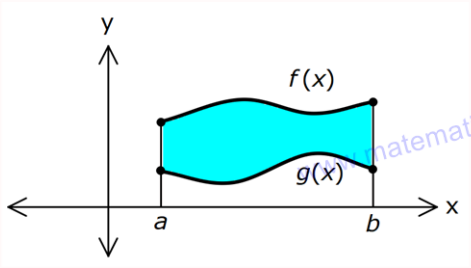
Boyalı bölge $= \int_0^2 (x^2+1)dx$

$= \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_0^2$

$= \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3}$ br^2 dir.

www.matematikkolay.net

İki Eğri Arasındaki Alan



[a, b] kapalı aralığında $f(x) \geq g(x)$ ise

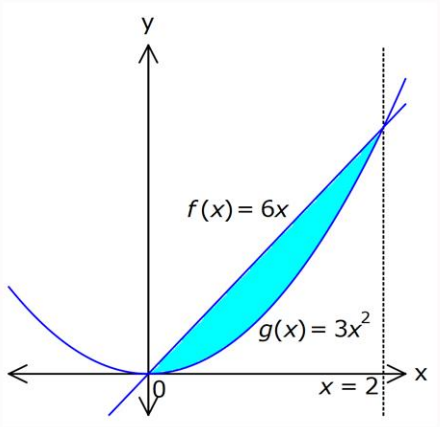
İki fonksiyon arasındaki alan

$$\int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$ integrali ile bulunur.

Yani, üstteki fonksiyondan alttaki fonksiyonu çıkarıp integral alacağız.

(x ekseninin altında olması bu durumu değiştirmez.)

Örnek:



Yukarıdaki grafikte verilen $f(x) = 6x$ ve $g(x) = 3x^2$ fonksiyonları arasındaki kapalı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

Çözüm:

$$\text{Alan} = \int_0^2 \left[6x - 3x^2\right]dx$$

$$= \left(3x^2 - x^3\right)\Big|_0^2$$

$$= (12 - 8) - (0)$$

$$= 4 \ br^2 \text{ buluruz.}$$

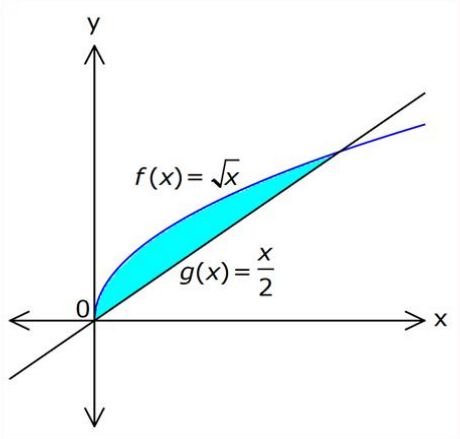
Not:

f(y), g(y) nin sağında bir fonksiyon olmak üzere,

bu iki fonksiyon arasındaki alan $\int_a^b [f(y) - g(y)]dy$

integrali ile bulunur.

Örnek:



Yukarıdaki grafikte verilen $f(x) = \sqrt{x}$ ve $g(x) = \frac{x}{2}$ fonksiyonları arasındaki kapalı bölgenin alanı kaç br^2 dir?

Çözüm:

$f(x) = \sqrt{x}$ ise $\Rightarrow y = \sqrt{x} \Rightarrow y^2 = x$ tir.

$g(x) = \frac{x}{2}$ ise $\Rightarrow y = \frac{x}{2} \Rightarrow 2y = x$ tir.

Kesişim noktalarının ordinatlarını bulalım.

$$y^2 = 2y \Rightarrow y^2 - 2y = 0 \Rightarrow \underbrace{y}_{0}\underbrace{(y-2)}_{2} = 0$$

Buna göre,

$$\text{Alan} = \int_0^2 (2y - y^2)dy = \left(y^2 - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \left(4 - \frac{8}{3}\right) - (0)$$

$$= \frac{12 - 8}{3}$$

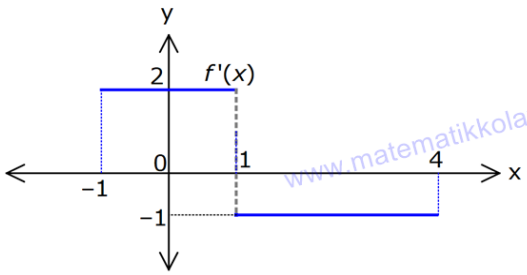
$$= \frac{4}{3} \ br^2 \text{ dir.}$$

Not:

Türev grafiği verildiğinde,

Belirli integral ile grafikteki alan arasındaki ilişkiden yararlanarak fonksiyon hakkında bazı bilgilere ulaşabiliriz.

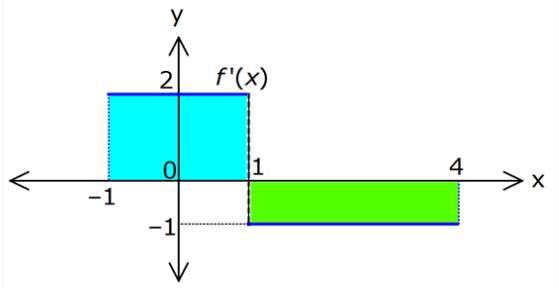
Örnek:



www.matematikkolay.net

Yukarıdaki grafikte $y = f(x)$ fonksiyonunun türevine ait bir grafik verilmiştir.
$f(-1) = 6$ olduğuna göre, $f(4)$ kaçtır?

Çözüm:



Soruda, türev grafiği verilmiştir.

$$\int_{-1}^{4} f'(x)dx = \underbrace{4}_{\text{mavi alan}} - \underbrace{3}_{\substack{\text{Yeşil Alan}\\ \text{(x ekseninin}\\ \text{altında kalıyor)}}} \quad \text{tür.}$$

$f(x)\Big|_{-1}^{4} = 1$

$f(4) - f(-1) = 1$

$f(4) - 6 = 1 \Rightarrow f(4) = 7$ buluruz.

www.matematikkolay.net

Not:
Hızın integrali yolu, ivmenin integrali ise hızı ver.

$\text{Yol} \xrightarrow{\text{Türev}} \text{Hız} \xrightarrow{\text{Türev}} \text{İvme}$ olduğunu biliyorduk.

$\text{Yol} \xleftarrow{\text{İntegral}} \text{Hız} \xleftarrow{\text{İntegral}} \text{İvme}$ şeklinde tersine işlem yapabiliriz.

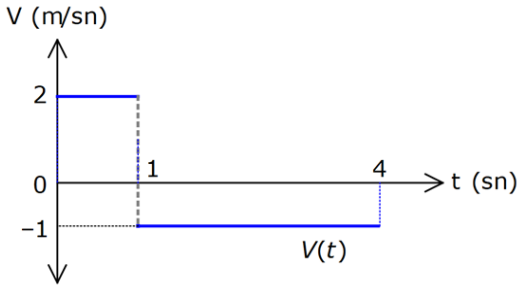
Örnek:
Hız fonksiyonu $V(t) = t$ metre / saniye olan bir hareketlinin ilk 4 saniyede yaptığı yer değiştirme kaç metredir? (t: saniye)

Çözüm:

$$\int_{0}^{4} t\,dt = \frac{t^2}{2}\Big|_{0}^{4} = 8 \text{ metredir.}$$

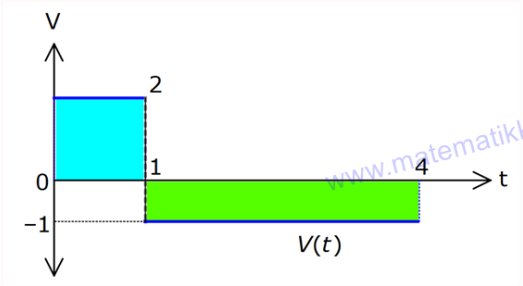
www.matematikkolay.net

Örnek:



Yukarıda hız-zaman grafiği verilen bir aracın 4.saniyedeki konumu, başlangıç konumuna göre nerdedir?

Çözüm:



Hız-zaman grafiğinde, integral bize yer değiştirmeyi verecektir.

$$\int_{0}^{4} V(t)dt = \underbrace{2.1}_{\substack{\text{Mavi}\\ \text{Üçgen}}} - \underbrace{3.1}_{\substack{\text{Yeşil}\\ \text{Üçgen}\\ \text{(geri}\\ \text{gidiyor)}}}$$

$= 2 - 3$

$= -1 \Rightarrow$ 1 metre geriye gitmiştir.

Not:
$x^2 + y^2 = r^2$ şeklinde denklemler, merkezi orijin olan r yarıçaplı çemberlerdir. y yi yalnız bırakarak,
$y^2 = r^2 - x^2$ şeklinde yazabiliriz.

$y = \sqrt{r^2 - x^2}$ x ekseninin üstündeki yarım çemberi

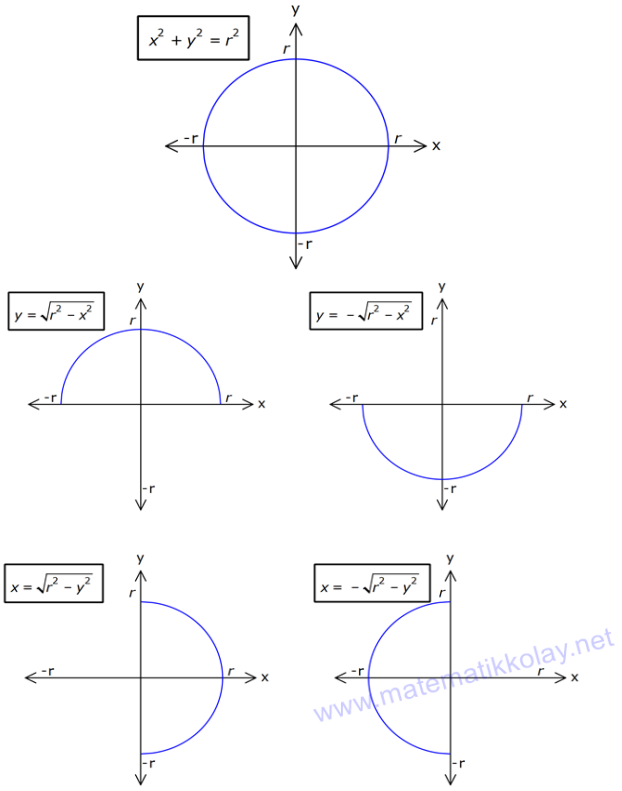
$y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ x ekseninin altındaki yarım çemberi ifade eder.

Aynı şekilde,
$x^2 = r^2 - y^2$ olarak da yazabiliriz.

$x = \sqrt{r^2 - y^2}$ y ekseninin sağındaki yarım çemberi

$x = -\sqrt{r^2 - y^2}$ y ekseninin solundaki yarım çemberi ifade eder.

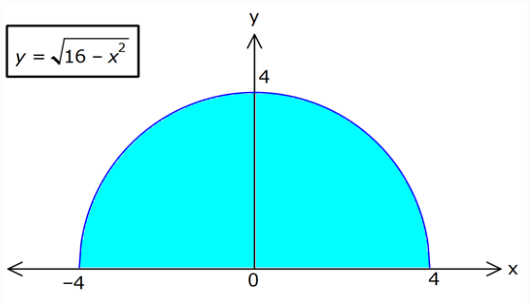
www.matematikkolay.net



Örnek:

$\int_{-4}^{4} \sqrt{16 - x^2}\,dx$ integralinin değeri kaçtır?

Çözüm:



$\int_{-4}^{4} \sqrt{16 - x^2}\,dx$ integrali de yukarıdaki boyalı bölgeyi ifade eder.

Alan $= \dfrac{\pi . 4^2}{2} = 8\pi$ br^2 dir (yarım çember). Buna göre,

$\int_{-4}^{4} \sqrt{16 - x^2}\,dx = 8\pi$ dir.

RIEMANN

Bir aralığın düzgün parçalanması

[a, b] aralığını n tane eş parçaya bölersek, aralıkların genişliği $= \dfrac{b-a}{n}$ olur.

Örnek:

[1, 7] aralığını 3 eş parçaya bölünce, alt aralıklar nasıl olur?

Çözüm:

Aralıkların genişliği $\dfrac{7-1}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$ br dir.

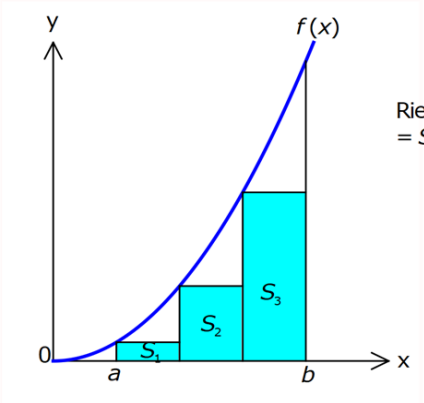
O halde, alt aralıklar

[1, 3], [3, 5], [5, 7] şeklinde olurlar.

Riemann Alt Toplamı

Alt aralıklarda fonksiyonun **en küçük değeri** ile oluşan dikdörtgenlerin alanları toplamına Riemann alt toplamı denir.

(En küçük değer negatif ise, Riemann değeri de negatiftir.)

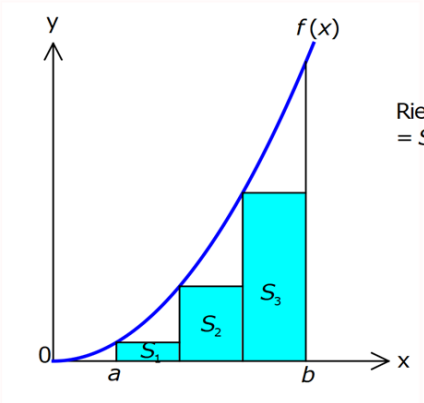


Örnek:

$y = x^2 - 4$ parabolünün [1, 7] aralığında 3 eş parçaya bölünmesiyle oluşan Riemann alt toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM:

Alt aralıklar [1, 3], [3, 5], [5, 7] şeklinde olurlar.



Rieaman alt toplamı

$2.\underbrace{(-3)}_{f(1)}+2.\underbrace{5}_{f(3)}+2.\underbrace{21}_{f(5)}=-6+10+42=46$ dır.

Not:

Riemann hesabında, ne kadar çok alt aralığa bölersek gerçek integral değerine o kadar yaklaşırız.

Riemann Üst Toplamı

Alt aralıklarda fonksiyonun **en büyük değeri** ile oluşan dikdörtgenlerin alanları toplamına da Riemann üst toplamı denir.

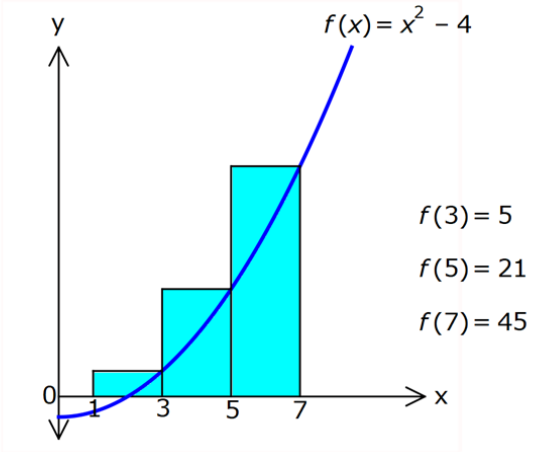
(En büyük değer negatif ise, Riemann değeri de negatiftir.)

Örnek:

$y=x^2-4$ parabolünün $[1,\ 7]$ aralığında 3 eş parçaya bölünmesiyle oluşan Riemann üst toplamı kaçtır?

ÇÖZÜM:

Alt aralıklar $[1,\ 3]$, $[3,\ 5]$, $[5,\ 7]$ şeklinde olurlar.



Rieaman üst toplamı

$2.\underbrace{5}_{f(3)}+2.\underbrace{21}_{f(5)}+2.\underbrace{45}_{f(7)}=10+42+90=142$ dir.

Not:

Her zaman Alt toplam $\leq$ İntegral $\leq$ Üst Toplam dır.

Alt aralıkların sayısı ne kadar fazla ise, gerçek integral değerine o kadar yaklaşılır.

Riemann Orta Toplamı

Alt aralıkların orta noktaları ile oluşturulan dikdört-genlerin alanları toplamına da Riemann orta toplamı denir.

(Orta değer negatif ise, Riemann değeri de negatif olur.)

Örnek:

$y=x^2-4$ parabolünün $[1,\ 7]$ aralığında 3 eş parçaya bölünmesiyle oluşan Riemann orta toplamı kaçtır?

Çözüm:

$\underbrace{[1,\ 3]}_{\substack{\text{Ortası 2}\\ f(2)=0}},\ \underbrace{[3,\ 5]}_{\substack{\text{Ortası 4}\\ f(4)=12}},\ \underbrace{[5,\ 7]}_{\substack{\text{Ortası 6}\\ f(6)=32}}$

$$\begin{aligned}\text{Riemann orta toplamı} &= 2.0+2.12+2.32\\ &= 0+24+64\\ &= 88 \text{ dir.}\end{aligned}$$