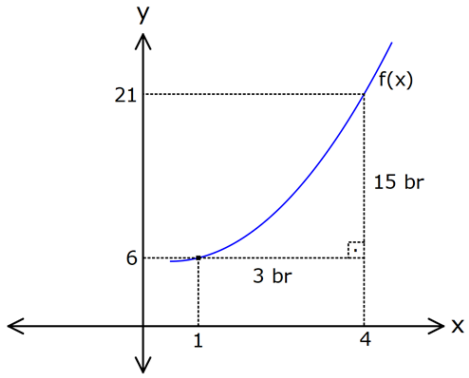
Değişim Oranı

f(x) in [a, b] aralığındaki değişim oranı (ortalama hızı)

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ formülü ile bulunur. $\left(\frac{y'\text{deki değişim}}{x'\text{teki değişim}}=\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$

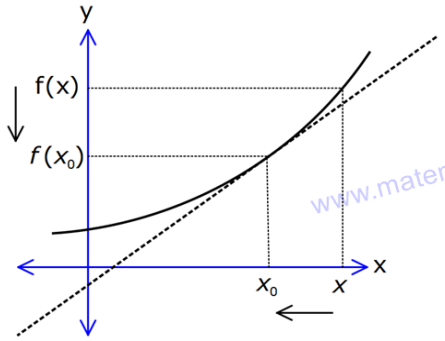
Örnek:



f(x) in [1, 4] aralığındaki değişim oranı

$\frac{f(4)-f(1)}{4-1}=\frac{21-6}{3}=\frac{15}{3}=5$ tir.

Anlık Değişim Oranı Ve Türev



Not : Bir fonksiyonun x_0 daki anlık değişim oranı

$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ formülü ile bulunur.

($x-x_0$ paydası sayesinde x'teki değişim sıfıra yaklaştırılır ve anlık değişim oranı bulunmuş olunur.)

x_0 noktasındaki anlık değişim oranına türev denir.

$f'(x_0)$ ile gösteririz.

Ayrıca x noktasındaki türevi $\frac{dy}{dx}$, y' şekillerinde de ifade edebiliriz.

Örnek:

$f(x)=x^2+2x$ fonksiyonu veriliyor.

$f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ formülünü kullanarak f'(4) ü hesaplayın.

Çözüm:

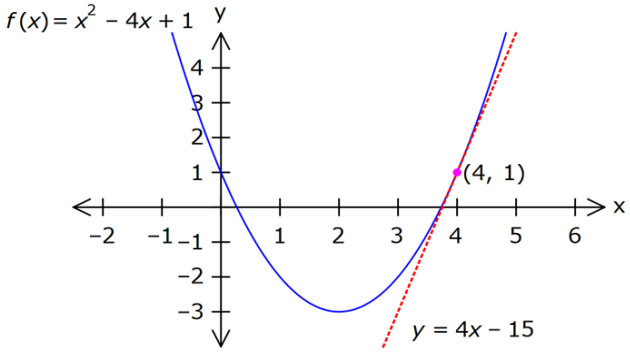
$$f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{x^2+2x-(16+8)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{x^2+2x-24}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{(x-4)}(x+6)}{\cancel{x-4}}$$
$$=4+6$$
$$=10 \text{ dur.}$$

Not:

Teğetin eğimi ile anlık değişim oranı aynıdır.

Dolayısıyla, teğetin eğimi $=f'(x_0)$ dır.

Örnek:



f(x)'in x = 4 noktasındaki türevini hesaplayalım.

$$f'(4)=\lim_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x+1-(16-16+1)}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{x^2-4x+1-1}{x-4}$$
$$=\lim_{x\to 4}\frac{x\cancel{(x-4)}}{\cancel{x-4}}$$
$$=4 \text{ tür.}$$

Dikkat ederseniz, teğetin eğimi de 4 tür.

$(y=\underbrace{\mathbf{4}}_{\text{eğim}}x-15)$

Türevin Limit Olarak Gösterimi

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$ dır.

Ayrıca x ile x_0 arasındaki mesafeye h dersek,

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$ olarak yazabiliriz.

Örnek:

$f(x)=x^2$ ise $f'(x)$ nedir?

Çözüm:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{x^2}+2xh+h^2-\cancel{x^2}}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(2x+h)}{\cancel{h}}$$
$$=\lim_{h\to 0}(2x+h)$$
$$=2x+0=2x \text{ tir.}$$

Not:

h'li türev formülündeki mantık şu şekildedir:

x_0 konumundan h birim yukarı çıktığımızı düşünelim.

$f(x_0+h)$ görüntüsü ile $f(x_0)$ görüntüsü arasındaki fark, bize y'deki değişimi verir.

h ise x'ler arsındaki mesafedir.

İkisinin oranında h'yi 0 a götürürsek, x_0 noktasında türev almış oluruz.

www.matematikkolay.net

Örnek:

$f(x)=\sqrt{x}$ ise $f'(4)$ nedir?

Çözüm:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}}{\cancel{h}\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}}$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ tir.}$$

$$f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{2.2}=\frac{1}{4} \text{ tür.}$$

Not:

Sorularda türevin limit gösterimleri farklı şekillerde ortaya çıkabilir. Bizim bunları, bildiğimiz formlara çevirmemiz gerekebilir.

Örnek:

$f(-2)=6$ ve $f'(-2)=4$ ise $\lim_{x\to -2}\frac{-f(x)+6}{3x+6}$ kaçtır?

Çözüm:

$$\lim_{x\to -2}\frac{-f(x)+6}{3x+6}=\lim_{x\to -2}\frac{-(f(x)-6)}{3(x+2)}$$
$$=-\frac{1}{3}\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-\overbrace{6}^{f(-2)}}{x+2}$$
$$=-\frac{1}{3}\boxed{\lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}}$$
$$=-\frac{1}{3}f'(-2)$$
$$=-\frac{4}{3} \text{ tür.}$$

Örnek:

$f'(0)=6$ ise $\lim_{x\to 0}\frac{f(0)-f(x)}{2x}$ kaçtır?

Çözüm:

$$-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\frac{f'(0)}{2}$$
$$=-\frac{6}{2}=-3 \text{ tür.}$$

veya;

x yerine h kullanalım.

$$-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$
$$=-\frac{1}{2}\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

$$=-\frac{f'(0)}{2}=-\frac{6}{2}=-3 \text{ tür.}$$

www.matematikkolay.net

Türev Alma Kuralları

Sabit fonksiyonun türevi 0 dır. Çünkü bir değişim yoktur.

Örnek:

$f(x)=-5$ ise $f'(x)=0$ dır.

$f(x)=\log_3 8$ ise $f'(x)=0$ dır.

Genel Türev Kuralı

k ve n birer gerçel sayı olmak üzere,

x^n in türevi $n.x^{n-1}$ dir.

Yani, üs başa çarpım olarak gelir.

Mevcut üs de bir azaltılır.

$\boxed{f(x)=k.x^n \text{ ise } f'(x)=k.n.x^{n-1} \text{ dir.}}$

Örnek:

$f(x)=x^3$ ise $f'(x)=3x^2$ dir.

$f(x)=3x^4$ ise $f'(x)=12x^3$ tür.

$f(x)=x^{-2}$ ise $f'(x)=-2x^{-3}$ tür.

$f(x)=\sqrt{x}$ ise $f'(x)=\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ tir.

$f(x)=\frac{2}{x^3}$ ise $f'(x)=\left(2x^{-3}\right)'=-6x^{-4}=-\frac{6}{x^4}$ tür.

$f(x)=x$ ise $f'(x)=1$ dir.

$f(x)=4x$ ise $f'(x)=4$ tür.

$f(x)=1$ ise $f'(x)=0$ dır. (Sabit Fonksiyon)

Örnek:

$f(x)=x^4$ ise $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(2)-f(x)}{2x-4}$ kaçtır?

Çözüm:

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(2)-f(x)}{2x-4}=-\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=-\frac{1}{2}f'(2)$ dir.

$f'(2)$ yi bulalım.

$f(x)=x^4$ ise $f'(x)=4x^3$ tür. $f'(2)=4.2^3=4.8=32$ dir.

$-\frac{1}{2}f'(2)=-\frac{32}{2}=-16$ buluruz.

Toplama ya da Çıkarmada Türev

f(x) ve g(x), türevlenebilir fonksiyonlar olsun.

$[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x)$ ve

$[f(x)-g(x)]'=f'(x)-g'(x)$ tir.

Yani, toplama ya da çıkarmada ayrı ayrı türev alabiliriz.

Örnek:

$f(x)=x^2+2x$ ise $f'(x)=2x+1$ dir.

$y=x^3-x+5$ ise $\frac{dy}{dx}=3x^2-1$ dir.

$y=x^{-2}+x^2$ ise $y'=-2x^{-3}+2x$ tir.

$y=2t^2+t$ ise $\frac{dy}{dx}=0$ dır. (y fonksiyonunda x değişkeni olmadığı için, sabit terim gibi işlem görür.)

$y=2t^2+t$ ise $\frac{dy}{dt}=4t+1$ dir.

$\left(\frac{dy}{dt}\right.$ demek, t ye göre türev al demektir.$\left.\right)$

Örnek:

$f(x)=ax^3-ax^2$ ve $f'(2)=24$ olduğuna göre, a kaçtır?

Çözüm:

$f'(x)=3ax^2-2ax$

$f'(2)=12a-4a$

$24=8a \Rightarrow a=3$ tür.

Çarpımın Türevi

f ve g türevlenebilir iki fonksiyon olsun.

$(f.g)'=f'.g+f.g'$ dir.

Yani,

Birinci fonksiyonun **türevi** çarpı İkinci fonksiyon + Birinci fonksiyon çarpı İkinci fonksiyonun türevidir.

Örnek:

$f(x)=(x^2+x)(x^3-x)$ ise $f'(1)$ kaçtır?

Çözüm:

$f'(x)=(x^2+x)'.(x^3-x)+(x^2+x).(x^3-x)'$

$=(2x+1).(x^3-x)+(x^2+x).(3x^2-1)$ dir.

$f'(1)=3.0+2.2$

$=4$ tür.

www.matematikkolay.net

Not:
Çarpımın türevinde, toplama ya da çıkarmada olduğu gibi ayrı ayrı türev alamayız.

Örnek:
$f(x)=(x^2-1).x^2$ olsun. $f'(2)$ yi bulalım.
$f'(x)=2x.x^2+(x^2-1).2x$
$f'(2)=2.2.4+3.4=16+12=28$ dir.

Ayrı ayrı türev alıp, çarpmak hatalı olur. Deneyelim.
x^2-1 in türevi 2x tir.
x^2 nin türevi 2x tir.
$2x.2x=4x^2$ buluruz.
x=2 yazarsak $4.2^2=4.4=16$ olur. (Ama 28 olmalıydı)

Not:
Bazen, çarpımın türev kuralını uygulamak yerine asıl fonksiyonu açarak yapmak daha kolay olabilir.

Örnek:
$f(x)=(x^2-1)(x^2+1)$ ise $f'(3)$ kaçtır?

Çözüm:
$f(x)=x^4-1$ olarak yazabiliriz.
$f'(x)=4x^3$ tür.
$f'(x)=4.3^3=4.27=108$ dir.

Çarpım kuralını uygulasaydık
$f'(x)=2x.(x^2+1)+(x^2-1).2x$
$f'(3)=6.10+8.6$
$=60+48$
$=108$ buluruz. (Daha çok işlem var)

İkiden Fazla Fonksiyon Çarpımında Türev
İkiden fazla çarpımda da türevin çarpım kuralını uygulayabiliriz. Sırasıyla birisinin türevini alıp, diğerlerinin türevsiz halleriyle çarpacağız. Sonra hepsini toplayacağız.

Örnek:
$f(2)=4$, $f'(2)=3$
$g(2)=2$, $g'(2)=1$
$h(2)=0$ $h'(2)=-1$

$f(x).g(x).h(x)$ çarpımının $x=2$ noktasındaki türevi kaçtır?

Çözüm:
$(f.g.h)'=f'.g.h+f.g'.h+f.g.h'$ dir.
$(f.g.h)'(2)=f'(2).g(2).h(2)+f(2).g'(2).h(2)+f(2).g(2).h'(2)$
$=3.2.0+4.1.0+4.2.(-1)$
$=0+0+(-8)$
$=-8$ dir.

Bölümün Türevi
f ve g türevlenebilir iki fonksiyon olsun.

$$\left(\frac{f}{g}\right)'=\frac{f'g-f.g'}{g^2} \text{ dir.}$$

Örnek:
$f(x)=\dfrac{x-2}{x^2+4}$ olduğuna göre, $f'(0)$ kaçtır?

Çözüm:
$$f'(x)=\frac{1.(x^2+4)-(x-2).2x}{(x^2+4)^2}$$
$$f'(0)=\frac{4-0}{16}=\frac{1}{4} \text{ tür.}$$

Fonksiyonun Kuvveti Alındığında Türev
n bir gerçel sayı olmak üzere,

$y=[f(x)]^n$ in türevi $y'=n.[f(x)]^{n-1}.f'(x)$ tir.

Yani, x^n gibi türevini aldıktan sonra ayrıca içerdeki fonksiyonun da türevini alacağız.

Örnek:
$f(x)=(x^2-2x)^3$ olduğuna göre, $f'(-1)$ kaçtır?

Çözüm:

$f'(x)=3(x^2-2x)^2.(2x-2)$ dir.

$f'(-1)=3.(1+2)^2.(-2-2)$

$=3.9.(-4)$

$=-108$ buluruz.

Örnek:

$f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-1}$ olduğuna göre, $f'(2)$ kaçtır?

Çözüm:

$f(x)=(x^2+x-1)^{-1}$

$f'(x)=-1(x^2+x-1)^{-2}(2x+1)$ dir.

$f'(2)=-\dfrac{2x+1}{(x^2+x-1)^2}$

$=-\dfrac{5}{(4+2-1)^2}$

$=-\dfrac{5}{25}$

$=-\dfrac{1}{5}$ buluruz.

www.matematikkolay.net

Örnek:

$f(x)=\sqrt{x^2-2x}$ olduğuna göre, $f'(4)$ kaçtır?

Çözüm:

$f(x)=\left(x^2-2x\right)^{\frac{1}{2}}$

$f'(x)=\dfrac{1}{2}\left(x^2-2x\right)^{-\frac{1}{2}}\left(2x-2\right)$

$f'(x)=\dfrac{1}{2}\dfrac{(2x-2)}{(x^2-2x)^{\frac{1}{2}}}$

$f'(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$ dir.

$f'(4)=\dfrac{3}{\sqrt{16-8}}=\dfrac{3}{\sqrt{8}}=\dfrac{3}{2\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ tür.

$(\sqrt{2})$

www.matematikkolay.net

Not:

Karekök için şunu yazabiliriz (Pratik olması için).

$\sqrt{f(x)}$ in türevi $\Rightarrow \dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ tir.

Örnek:

$f(x)=\sqrt{x^2-2x}$ in türevi $\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}}=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$ tir.

Not:

Köklü ifadelerin dereceleri 2 den farklıysa, üslü ifadelere çevirip türev alabiliriz.

(Onlar için de türev kuralı var ama bu aşamada ezberlemeye gerek görmüyoruz.)

www.matematikkolay.net

Örnek:

$f(x)=\sqrt[3]{x^2+x-3}$ ise $f'(5)$ kaçtır?

Çözüm:

$f(x)=\left(x^2+x-3\right)^{\frac{1}{3}}$

$f'(x)=\dfrac{1}{3}\left(x^2+x-3\right)^{-\frac{2}{3}}\left(2x+1\right)$

$f'(x)=\dfrac{2x+1}{3(x^2+x-3)^{\frac{2}{3}}}$

$f'(x)=\dfrac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x-3)^2}}$ dir.

www.matematikkolay.net

$f'(5)=\dfrac{11}{3\sqrt[3]{(25+5-3)^2}}$

$=\dfrac{11}{3\sqrt[3]{(27)^2}}=\dfrac{11}{3\sqrt[3]{3^6}}=\dfrac{11}{3.3^2}=\dfrac{11}{27}$ buluruz.

Bileşke Fonksiyonun Türevi

f(x) ve g(x), türevlenebilir fonksiyonlar olsun.

$(fog)'(x)=\left[f(g(x))\right]'=f'(g(x)).g'(x)$ tir.

Yani, $[f(x)]^n$ gibi, türevini aldıktan sonra içerdeki fonksiyonun türevini de çarpım olarak yazıyoruz.

Örnek:

$f(x)=x^2-1$ ve $g(x)=x^3$ olduğuna göre, $(fog)'(2)$ kaçtır?

Çözüm:

$(fog)'(2) = f'(g(2)).g'(2)$ dir.

$f'(x) = 2x$ tir.
$g(2) = 2^3 = 8$ dir.
$f'(g(2)) = 2.8 = 16$ dır.
$g'(x) = 3x^2$
$g'(2) = 12$ dir.

Buna göre,

$(fog)'(2) = \underbrace{f'(g(2))}_{16}.\underbrace{g'(2)}_{12} = 192$ buluruz.

Örnek:

$f(x^3 - 8) = x^2 - 1$ ise, $f'(-7)$ kaçtır?

Çözüm:

$f(x^3 - 8) = x^2 - 1$ iki tarafın türevini alalım.

$(3x^2).f'(x^3 - 8) = 2x$ $\quad$ $x = 1$ yazalım.

$3.f'(-7) = 2$

$f'(-7) = \frac{2}{3}$ tür.

Türevde Zincir Kuralı

$y = f(u)$, $u = g(t)$ ve $t = h(x)$ olsun.

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$ olarak bulabiliriz.

Örnek:

$y = u^2$

$u = v^3 - 17$

$v = \sqrt{x}$ olduğuna göre, $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=9}$ kaçtır?

Çözüm:

$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$

$= 2u \cdot 3v^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\left(\begin{array}{l} x = 9 \text{ için } v = 3 \text{ tür.} \\ \qquad v = 3 \text{ için } u = 27 - 17 = 10 \text{ dur.} \end{array} \right)$

$= \cancel{2}.10.\cancel{3}.9 \cdot \frac{1}{\cancel{2}.\cancel{3}}$

$= 90$ buluruz.

İkinci Mertebeden Türev

Bir fonksiyonun türevinin bir daha türevini alırsak ikinci mertebeden türevini almış oluruz.

Bu durum y'', $f''(x)$ veya $\frac{d^2(f(x))}{dx^2}$ olarak gösterilir.

Örnek:

$f(x) = x^3 + 2x^2 + x$ olduğuna göre, $f''(1)$ kaçtır?

Çözüm:

$f'(x) = 3x^2 + 4x + 1$ dir.

$f''(x) = 6x + 4$ tür.

$f''(1) = 6 + 4 = 10$ dur.

Not:

Bir fonksiyonun çift katlı bir kökü varsa,

1. türevinin de bir köküdür.

Üçüncü dereceden kökü varsa, hem birinci hem de ikinci dereceden de kökü olacaktır.

... Bu şekilde ilerletebiliriz.

Örnek:

$f(x) = (x-2)^2$ ise $f'(x) = 2(x-2)$ dir.

$x = 2$ değeri $f'(x)$ in köküdür.

$g(x) = (x-1)^3$ ise $g'(x) = 3(x-1)^2$ dir.

$g''(x) = 6(x-1)$ dir.

$\Rightarrow$ $x = 1$ değeri $g'(x)$ ve $g''(x)$ in köküdür.

Türevin Varlığı Ve Süreklilik

Limit gibi, bir noktada sağdan ve soldan türeve bakılabilir.

Soldan Türev $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a^+)$

Sağdan Türev $\Rightarrow \lim\limits_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a^-)$ dır.

Bir noktada türev var, diyebilmemiz için fonksiyon o noktada **tanımlı ve sürekli** olmalı ayrıca **soldan ve sağdan türevler birbirine eşit** olmalıdır.

Örnek:

www.matematikkolay.net

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x\le 1 \\ 3x & x>1 \end{cases}$$

fonksiyonu veriliyor. $f'(1)$ var mıdır?

Çözüm:

Sürekliliğe bakalım.

$$\left.\begin{array}{l} f'(1^-)=1+2=3 \text{ tür.} \\ f'(1)=1+2=3 \text{ tür.} \\ f'(1^+)=3.1=3 \text{ tür.} \end{array}\right\} x=1 \text{ noktasında süreklidir.}$$

Soldan ve sağdan türevlere bakalım.

$$\left.\begin{array}{l} 1^- \text{ için } f'(x)=2\underbrace{x}_{1}=2 \text{ dir.} \\ 1^+ \text{ için } f'(x)=3 \text{ tür.} \end{array}\right\} \text{Eşit değil. Türev yoktur.}$$

Not:

Şartlar düşünüldüğünde en ağır şart, türevlilik şartlarıdır. Yani bir fonksiyonunun $x=a$ da türevi varsa, Bu fonksiyon $x=a$ da,

* Limiti vardır. (Sağdan ve soldan limitler eşittir.)
* Tanımlıdır.
* Süreklidir.
* Sağdan ve soldan türevleri birbirine eşittir.

Bunlardan biri bile sağlanamazsa türevi yoktur.

Örnek:

$f(x)=\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}$ olduğuna göre, $f(x)$ in hangi aralıkta türevi vardır?

Çözüm:

$f(x)=\underbrace{\sqrt{x-2}}_{x\ge 2}+\underbrace{\sqrt{4-x}}_{x\le 4} \Rightarrow$ Tanım aralığı [2, 4] aralığıdır.

Türev aldığımızda,

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x-2}}-\dfrac{1}{2\sqrt{4-x}}$ olur.

Paydayı 0 yapacak değerleri yazdığımızda fonksiyonun türevi reel bir sayıya eşit olamaz. Bu sebeple $x=2$ ve $x=4$ değerlerinde de türev yoktur.

Tanım kümesindeki diğer noktalarda ise soldan ve sağdan türev aynı gelecektir.

O halde, $f(x)$ in (2, 4) aralığında türevi vardır.

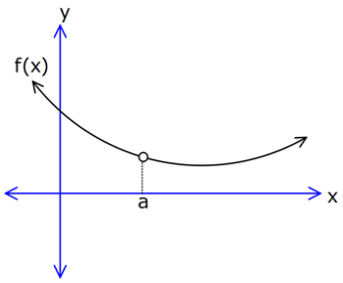
Not: Bir fonksiyonun olabilecek en geniş tanım aralığındaki uç noktalarında türevi olmaz.

Örnek: $\sqrt{x-1}$ in $x=1$ de türevi yoktur.

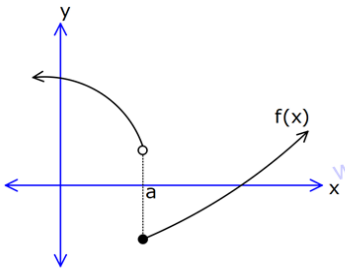
Örnek: [2, 3] aralığında tanımlı $\sqrt{x-1}$ in $x=2$ de türevi vardır.

($x=2$, olabilecek en geniş tanım aralığının uç noktası değildir.)

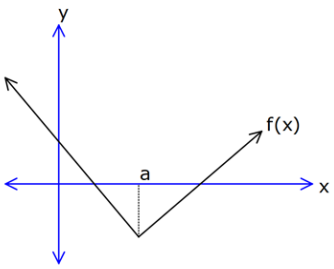
Not:



$f(x)$ in $x=a$ noktasında türevi yoktur. Çünkü fonksiyon tanımlı değildir.

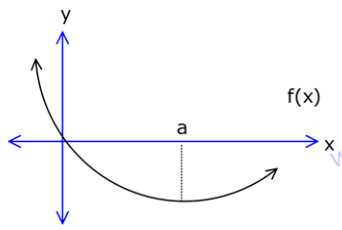


$f(x)$ in $x=a$ noktasında türevi yoktur. Çünkü fonksiyon sürekli değildir.

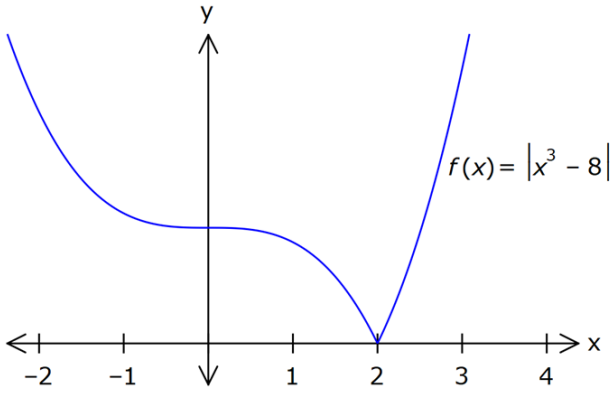


$f(x)$ in $x=a$ noktasında türevi yoktur. Çünkü soldan ve sağdan farklı türeve (eğime) sahiptir.

Not: Grafiklerde sivri uç, kırıklık, köşe görüyorsak buralarda direkt türev yok diyebiliriz.



f(x) in $x=a$ nokta-sında türevi vardır. Kırık uçlarda olduğu gibi burada sert eğim geçişi olmamıştır.



Grafik olarak düşündüğümüzde x=2 de sivri uç vardır. Burada türev olmayacaktır.

Mutlak Değerli Fonksiyonlarda Türev

Mutlak değerin içini 0 yapmayan noktalarda, bulunduğu bölgeye göre, fonksiyon mutlak değerin dışına alınır ve türev uygulanır.

Ancak, mutlak değerin içini 0 yapan noktalar kritik noktalardır. Bu noktalarda sağdan ve soldan türeve bakılıp, öyle karar verilmelidir.

Örnek:

$f(x)=|x^3-8|$ dir. $f'(1), f'(3), f'(2)$ değerlerini bulunuz.

$x=1$ için $\underbrace{|x^3-8|}_{\text{içerisi negatif}}=-x^3+8$ olarak dışarı çıkar.

Türev alırsak $\Rightarrow$ $-3x^2$ olur. O halde, $f'(1)=-3$ tür.

$x=3$ için $\underbrace{|x^3-8|}_{\text{içerisi pozitif}}=x^3-8$ olarak dışarı çıkar.

Türev alırsak $\Rightarrow$ $3x^2$ olur. O halde, $f'(3)=27$ dir.

$x=2$ değeri, mutlak değerin içini 0 yapıyor.

Bu nedenle soldan ve sağdan bakalım.

$x=2^-$ için $-x^3+8$ olarak dışarı çıkar.

$\Rightarrow$ Türevi $-3\underbrace{x^2}_{2}=-12$ dir.

$x=2^+$ için x^3-8 olarak dışarı çıkar.

$\Rightarrow$ Türevi $3\underbrace{x^2}_{2}=12$ dir.

Farklı olduğu için $f'(2)$ yoktur.

Not:

Mutlak değerin içini 0 yapan kök, birinci dereceden bir kök ise orada türev yoktur.

Eğer 2 veya daha fazla dereceden bir kök ise, orada türev vardır ve 0 dır.

Örnek:

$f(x)=|x+2|$ fonksiyonunda $f'(-2)$ yoktur.

$g(x)=|(x+2)^2|$ fonksiyonunda $g'(-2)$ vardır ve 0 dır.

$h(x)=|(x+2)^3|$ fonksiyonunda $h'(-2)$ vardır ve 0 dır.

Örnek:

a bir reel sayı olmak üzere,

$f(x)=|x^2+ax+4|$ fonksiyonu tüm reel sayılarda türevli ise, a'nın alabileceği değer aralığını bulunuz.

Çözüm:

Mutlak değerin birinci dereceden bir kökü olmazsa reel sayılarda türevli olur.

Yani, çift katlı kökü olabilir ya da hiç kökü olmayabilir.

O halde, $\Delta \le 0$ olmalıdır.

$a^2-4.1.4\le 0$

$a^2-16\le 0$

$a^2\le 16$

$-4\le a\le 4$ aralığında olmalıdır.

L'hospital

Limit alırken $\frac{0}{0}$ belirsizliği ile karşılaşıyorsak,

Pay ve paydanın ayrı ayrı türevini alıp limit hesaplayabiliriz. (Bölümün türevi değil.)

L'hospital kuralı olarak geçen bu kural, müfredatta yer almıyor. Ancak bilinmesinde büyük yarar vardır.

Örnek:

$\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{\sqrt{x}-1}$ limitinin değeri kaçtır?

Çözüm:

$x=1$ için $\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x}-1} = \frac{0}{0}$ belirsizliği

L'hospital yapalım.

Pay ve paydanın türevini alırsak $\frac{2x+1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}$ olur.

www.matematikkolay.net

$x=1$ yazalım. $\Rightarrow \frac{2+1}{\frac{1}{2}} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$ buluruz.

Türevin Fiziksel Yorumu

Yol fonksiyonunun 1.türevi bize anlık hızı verir.

$\Rightarrow$ $v(t)=s'(t)$ dir.

Bir daha türev alırsak, anlık ivmeyi buluruz.

$a(t)=v'(t)=s''(t)$ dir.

Örnek:

Bir aracın t saniyede aldığı yol metre cinsinden $s(t)=2t^3-t^2$ eşitliği ile veriliyor. Buna göre,

Aracın 3.saniyedeki hızını

Aracın 3.saniyedeki ivmesini

Aracın ilk 3 saniyedeki ortalama hızını bulunuz.

Çözüm:

Anlık hız $=s'(t)=6t^2-2t$ dir.

$t=3$ için $s'(t)=6.9-6=54-6=48$ m/sn dir.

$\Rightarrow$ O halde, 3.saniyedeki hızı 48 m/sn dir.

İvme $=s''(t)=12t-2$ dir.

$t=3$ için $s''(t)=36-2=34$ m/sn^2 dir.

$\Rightarrow$ O halde, 3.saniyedeki ivmesi 34 m/sn^2 dir.

www.matematikkolay.net

Not: Ortalama Hız $=\frac{\text{Toplam Yol}}{\text{Toplam Zaman}}$

İlk 3 saniyedeki ortalama hız $=\frac{s(3)-s(0)}{3-0}$

$=\frac{(2.27-9)-0}{3}=\frac{45}{3}=15$ m/sn dir.

Türevin Geometrik Yorumu

Bir fonksiyonun bir noktadaki türevi, aynı noktadan çizilen teğet doğrusunun eğimine eşittir.

Örnek:

$y=x^2+x$ eğrisinin $x=1$ noktasındaki teğetinin eğimini bulunuz.

Çözüm:

$y'=2x+1$ dir.

$x=1$ için $y'=2+1=3$ tür. (Teğetin eğimi)

Örnek:

$y=x^3-x$ eğrisinin $x=2$ noktasındaki teğetinin denklemini bulunuz.

Çözüm:

$y' = 3x^2 - 1$ dir.

$x = 2$ için $y' = 12 + 1 = 11$ dir. (Teğetin eğimi)

Teğet noktasını bulalım.

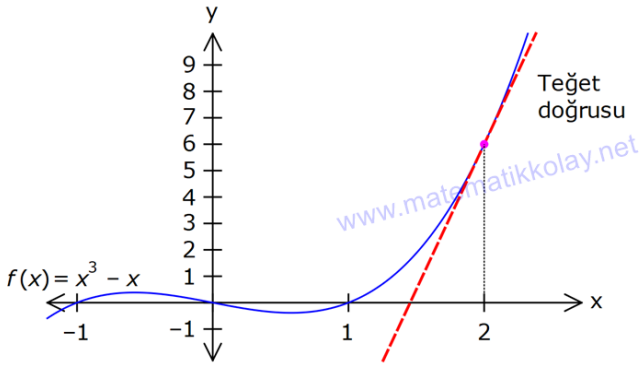
$x = 2$ için $y = 8 - 2 = 6$ dır.

(2, 6) noktasından geçen ve eğimi 11 olan doğru

$y - 6 = 11(x - 2)$

$y - 6 = 11x - 22$

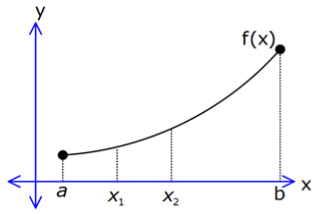
$y = 11x - 16$ dır. (Teğet doğrusu)



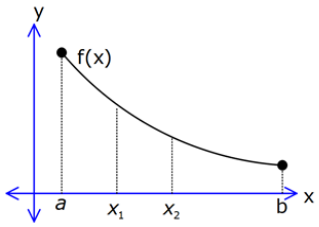
Artan Ve Azalan Fonksiyonlar

f(x), **[a, b]** aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun.

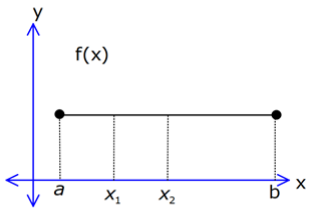
x_1 ve x_2 **(a, b)** aralığında birer nokta olmak üzere,



Her $x_1 < x_2$ için $f(x_1) < f(x_2)$ sağlanıyorsa **[a, b]** aralığında **f(x) artandır.**



Her $x_1 < x_2$ için $f(x_1) > f(x_2)$ sağlanıyorsa **[a, b]** aralığında **f(x) azalandır.**



Her $x_1 < x_2$ için $f(x_1) = f(x_2)$ sağlanıyorsa **[a, b]** aralığında **f(x) sabittir.**

Türevlenebilir Fonksiyonlarda Artanlık-Azalanlık Durumları

f(x) **[a, b]** aralığında tanımlı, türevli bir fonksiyon olsun. Her $x \in (a, b)$ için

$f'(x) > 0$ ise **[a, b]** aralığında **f(x) artandır.**

$f'(x) < 0$ ise **[a, b]** aralığında **f(x) azalandır.**

$f'(x) = 0$ ise **[a, b]** aralığında **f(x) sabittir.**

Örnek:

$f: R \to R$ olmak üzere,

$f(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x - 8$ fonksiyonunun azalan, artan olduğu en geniş aralıkları bulunuz.

Çözüm:

$f'(x) = 6x^2 - 42x + 60$ tır.

İşaret tablosu oluşturalım.

$6x^2 - 42x + 60 = 0$ 6'ya bölelim.

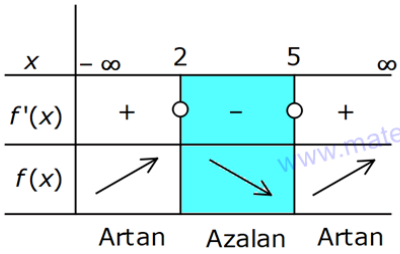
$x^2 - 7x + \underset{(-2)(-5)}{10} = 0$

$(x - 2)(x - 5) = 0$

$\Rightarrow$ $x = 2$ ve $x = 5$ te işaret değişecek.

Başkatsayısı pozitif $\Rightarrow$ sağdan + ile başlayacağız.

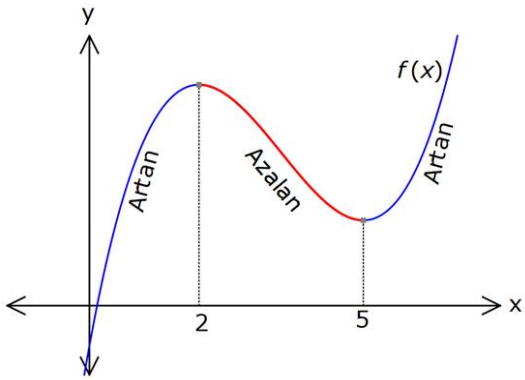
Tabloyu oluşturalım.



f(x) in türevi (2, 5) aralığında negatif olduğu için f(x) fonksiyonu [2, 5] aralığında azalandır.

$(-\infty, 2]$ ve $[5, \infty)$ aralıklarında ise f(x) artandır.

Eğer merak ederseniz, fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir:



Örnek:

$f(x)=x^3-6x^2+ax-8$ fonksiyonu daima artan ise a nın alabileceği değer aralığını bulunuz.

Çözüm:

Daima artan olabilmesi için, türevi sürekli pozitif olmalıdır. (Noktalar sınırlı sayıda ise türev ara noktalarda 0 da olabilir.)

$f'(x)=3x^2-12x+a$

Bu ifadenin hiçbir şekilde negatif olmaması lazım.

Başkatsayısı pozitif.

O halde, bu ifadenin iki farklı kökü olmamalıdır.

Yani $\Delta \le 0$ olmalıdır.

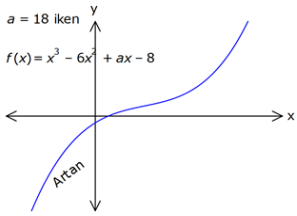
$144-4.3.a \le 0$

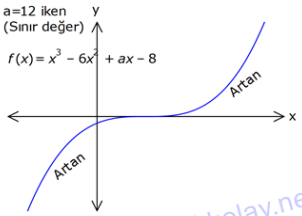
$144-12.a \le 0$

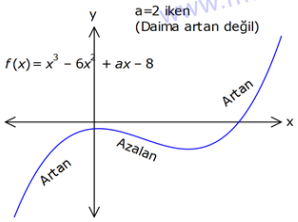
$144 \le 12.a$

$12 \le a \Rightarrow$ a nın değer aralığı $[12, \infty)$ olmalıdır.

a nın çeşitli değerleri için, aşağıda bir kaç örnek grafik çizilmiştir. Merak ediyorsanız, inceleyebilirsiniz.







Not:

Tek bir noktada türevin 0 olması, artanlık ya da azalanlığı bozmaz.

Örnek:

$f(x)=(x-1)^3$ fonksiyonunun artanlık azalanlık durumunu inceleyiniz.

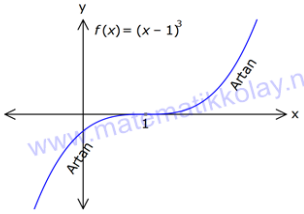
Çözüm:

$f'(x)=3(x-1)^2$ dir.

$x=1$ kökü çift katlı köktür.

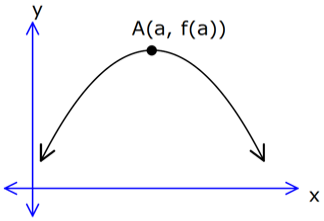
İşaret tablosunu çizelim.

x	$-\infty$	1	∞
$f'(x)$	+		+
$f(x)$	↗ Artan		↗ Artan

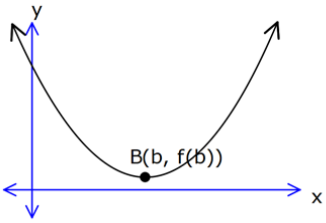


f(x) daima artandır. $(-\infty, \infty)$

Ekstremum Noktalar



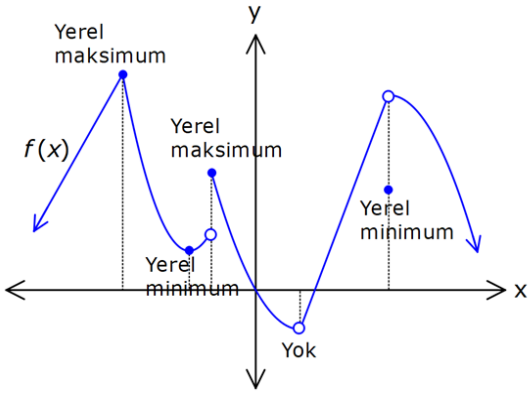
f(x), $x=a$ noktasında, hemen yanındaki noktalara göre daha büyük değer alıyorsa bu nokta bir **yerel maksimum noktasıdır.**



f(x), $x=b$ noktasında hemen yanındaki noktalara göre daha küçük değer alıyorsa bu nokta bir **yerel minimum noktasıdır.**

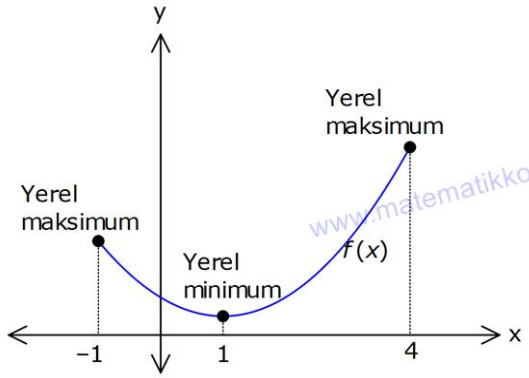
Yerel maksimum ve yerel minimum noktalarına genel olarak **ekstremum noktalar** denir.

Örnek:



Not:
Tanım aralığı kapalı şekilde belirtiliyorsa,
sınır noktalar, birer yerel maksimum veya yerel minimum noktasıdır.
Açık aralık olursa, birer ekstremum nokta olamaz.

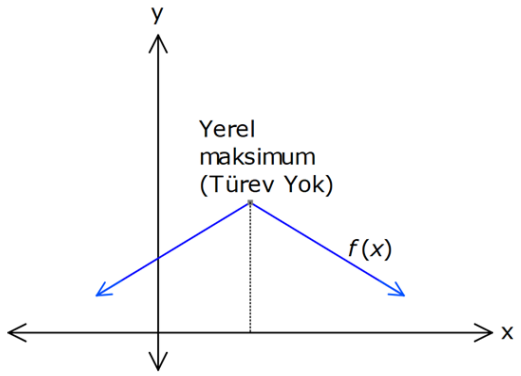
Örnek:



Yukarıda [−1, 4] aralığında tanımlanmış f(x) fonksiyonunun 3 tane ekstremum noktası vardır.
(2 tane yerel maksimum, 1 tane yerel minimum)

Not:
Ektremum noktalar için türevin varlığı, olmazsa olmaz bir şart değildir.

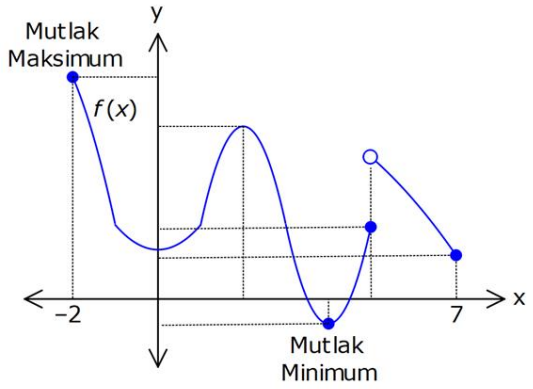
Örnek:



Mutlak Maksimum Ve Mutlak Minimum
Bir fonksiyonun tanımlı olduğu aralıkta, en büyük değerini aldığı noktaya **mutlak maksimum noktası**, burdaki değerine ise **mutlak maksimum değeri** denir.
Bir fonksiyonun tanımlı olduğu aralıkta, en küçük değerini aldığı noktaya **mutlak minimum noktası**, burdaki değerine ise **mutlak minimum değeri** denir.

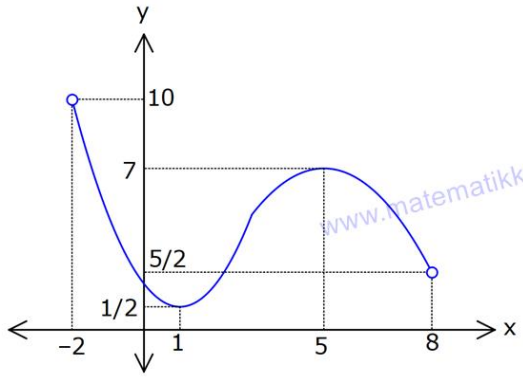
Doğal olarak, bu noktalar (eğer varsa), ekstremum noktalardan olacaktır (Sınır değerlerin de birer ekstremum nokta olduğunu unutmayalım).

Örnek:



Not:
Fonksiyonun mutlak maksimum veya mutlak minimum noktalarını kesin olarak belirleyemiyorsak, fonksiyonun mutlak maksimum veya mutlak minimum noktası yoktur.
Bu sebeple tanım aralığı, açık aralık şekilde veya sonsuz olarak belirtilen durumlarda mutlak maksimum veya mutlak minimum noktaları olmayabilir.

Örnek:

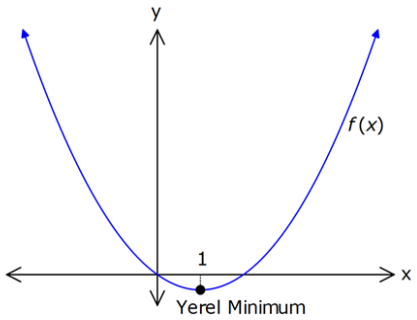


Fonksiyonun en küçük değeri $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ noktasında gerçekleşiyor. Bu sebeple mutlak minimum değeri $\frac{1}{2}$ dir.
Ancak, mutlak maksimumu net belirleyemiyoruz. Fonksiyon, en büyük değerini 10'a yakın bir yerlerde alıyor ama buradaki nokta net değil. Bu sebeple mutlak maksimum değeri yoktur.

Türev ve Ekstremum Nokta

f(x) fonksiyonun ekstremum noktada türevi varsa, bu noktada türevi 0 dır.

Örnek:



$f(x)=x^2-2x$ fonksiyonunun $x=1$ de ekstremum noktası vardır. Türevine bakalım.

$f'(x)=2x-2$ dir.

$f'(1)=2-2=0$ dır.

Ekstremum noktada türev varsa, 0 dır.

Not:

Türevin 0 olduğu tek katlı köklerde yerel ekstremum nokta vardır (Çift katlı köklerde değil).

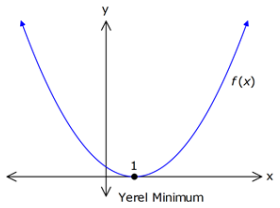
Örnek:

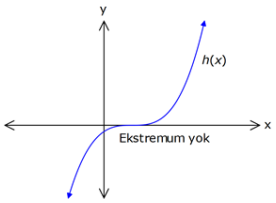
$f(x)=(x-1)^2$ ise $f'(x)=2(x-1)=0$

$\Rightarrow$ $x=1$ de ekstremum nokta vardır.

$h(x)=(x-1)^3$ ise $h'(x)=3(x-1)^2=0$

$\Rightarrow$ $x=1$ de ekstremum nokta yoktur.





Not:

Fonksiyonun artanlıktan azalanlığa $(\nearrow\searrow)$ geçtiği yerde yerel maksimum noktası

Fonksiyonun azalanlıktan artanlığa $(\searrow\nearrow)$ geçtiği yerde yerel minimum noktası vardır.

Örnek:

Reel sayılarda tanımlı $f(x)=x^3-\frac{9x^2}{2}-12x+19$ fonksiyonunun yerel minimum ve yerel maksimum noktalarını bulunuz.

Çözüm:

Sorudaki fonksiyon, polinom fonksiyon olduğundan tüm reel sayılarda türevli bir fonksiyondur.

Bu sebeple türevin 0 olduğu noktalara bakabiliriz.

$f'(x)=3x^2-9x-12$ dir.

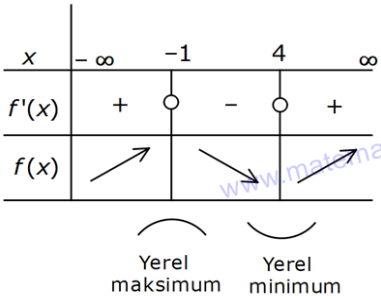
$3x^2-9x-12=0$ yapan x değerlerini bulalım.

$x^2-3x-\underset{-4.1}{4}=0$

$(x-4)(x+1)=0$ dır.

$x=4$ ve $x=-1$ köklerdir (Tek katlı kökler)

Hangisinin yerel maksimum, hangisinin yerel minimum nokta olduğuna karar vermek için, işaret tablosuna bakalım.



Artanlık, azalanlık değişim noktalarına bakarak, $x=-1$ de yerel maksimum, $x=4$ te yerel minimum nokta olacağını söyleyebiliriz.

$x=-1$ için $f(x)=-1-\frac{9}{2}+12+19$

$=\frac{51}{2}$ dir.

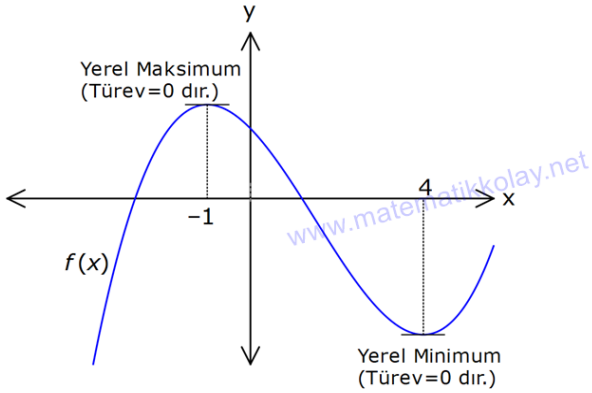
$\Rightarrow \left(-1,\ \frac{51}{2}\right)$ noktası (yerel maksimum)

$x=4$ için $f(x)=64-9.8-48+19$

$=-37$

$\Rightarrow$ $(4,\ -37)$ noktası (yerel minimum)

Merak ederseniz, fonksiyonun grafiğine aşağıda bakabilirsiniz:



Örnek:

$f(x)=\frac{x^4}{4}-x^3-2x^2+12x$ fonksiyonunun en küçük değeri kaçtır?

Çözüm:

Türevinin 0 olduğu noktalara bakalım.

$x^3-3x^2-4x+12=0$

$x^2(x-3)-4(x-3)=0$

$(x^2-4)(x-3)=0$

$(x-2)(x+2)(x-3)=0$

İşaret tablosunu oluşturalım.

x	$-\infty$		-2		2		3		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗		↘		↗	
			Yerel minimum		Yerel maksimum		Yerel minimum		

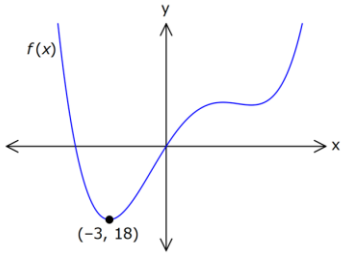
Fonksiyon, $-\infty$ da ve ∞ da yüksek değerlerde. Dolayısıyla minimum değerinin, yerel minimum noktalarında olmasını bekleyebiliriz.

$x=-2$ için $f(x)=4+8-8-24=-18$ dir.

$x=3$ için $f(x)=\frac{81}{4}-27-18+36=\frac{45}{4}$ tür.

O halde, en küçük değeri -18 dir.

Eğer merak ederseniz, fonksiyonun grafiği aşağıdaki gibidir:



Polinom Fonksiyonların Grafiğini Çizerken Türevi Kullanma

Fonksiyonların grafikleri çizilirken,

1. Tanım aralığına dikkat edilmelidir. Polinom fonksiyonlarda, aksi belirtilmedikçe tanım kümesi tüm reel sayılardır.
2. Eksenleri kesen noktalar belirlenir. Hem $x=0$ için y değeri, hem de $y=0$ ı sağlayan x değerleri bulunur.

Not: Tek katlı kökler x eksenini keserek diğer tarafa geçer. Ancak, çift katlı kökler x eksenine teğet olur ve karşı tarafa geçmezler.

3. Türev yardımıyla, işaret tablosu oluşturulur. Buna bakılarak artanlık, azalanlık durumları ve ekstremum noktaları belirlenir.

Örnek:

Reel sayılarda tanımlı $f(x)=3x-x^3$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

Çözüm:

Eksenleri kesen noktalarla başlayalım.

$3x-x^3=0$

$x(3-x^2)=0$

$x(\sqrt{3}-x)(\sqrt{3}+x)=0 \Rightarrow$ x eksenini $x=-\sqrt{3}$, 0 ve $\sqrt{3}$ te keser.

Hepsi tek katlı köktür.

$x=0$ için $f(x)=3.0-0^3=0-0=0$ dır.

O halde, $f(x)$ orjinden geçecektir.

Bir de türevini inceleyelim.

$f'(x)=3-3x^2$ dir.

www.matematikkolay.net

0 yapan değerleri bulalım.

$3(1-x^2)=0 \Rightarrow x=-1$ ve 1 dir.

$f(-1)=3.(-1)-(-1)^3=-3+1=-2$ dir.

$f(1)=3.(1)-(1)^3=3-1=2$ dir.

Şimdi işaret tablosu yapalım.

En büyük dereceli terim negatif olduğu için sağdan $-$ ile başlayacağız.

x	$-\infty$		-1		1		∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
			Yerel minimum		Yerel maksimum		

Şimdi grafiği çizebiliriz.

$x=-\infty$ dan -1 e doğru sürekli azalarak gelecek.

Bu arada $x=-\sqrt{3}$ te x eksenini kesecektir.

$(-1,\ -2)$ noktası yerel minimum olacaktır.

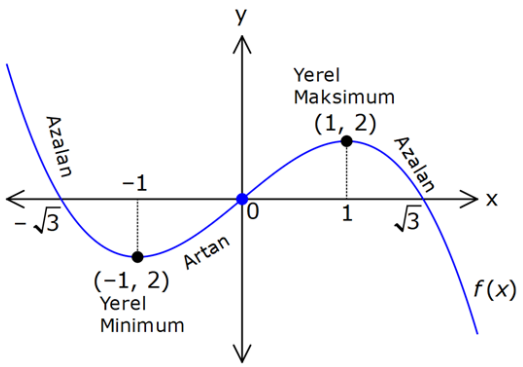
$x=-1$ den 1 e doğru sürekli artarak gidecek.

Bu arada orjinden geçecektir.

$(1,\ 2)$ noktası yerel maksimum olacaktır.

$x=1$ ten sonra ise sürekli azalacaktır.

Bu azalma sırasında da x eksenini $\sqrt{3}$ te kesecektir.



Not:

Reel sayılarda tanımlı **daima artan** ya da **daima azalan** fonksiyonlar birebir ve örten fonksiyon olurlar.

Reel sayılarda tanımlı bir fonksiyonun daima artan ya da daima azalan olması için bir fonksiyonun ekstremum noktası olmamalıdır.

Örnek:

$f:R\to R$ ve a bir reel sayı olmak üzere,

$f(x)=x^3-6x^2+ax-9$ fonksiyonu birebir ve örten olduğuna göre, a değerinin alabileceği değer aralığını bulunuz.

Çözüm:

$f'(x)$ için $\Delta\le 0$ olmalıdır. (Ekstremum nokta olmamalı)

$f'(x)=3x^2-12x+a$ dır.

$\Delta\le 0$ olmalı

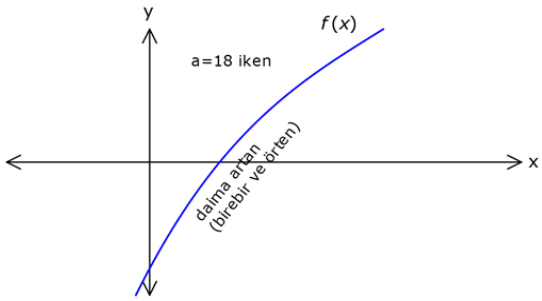
$144-4.3.a\le 0$

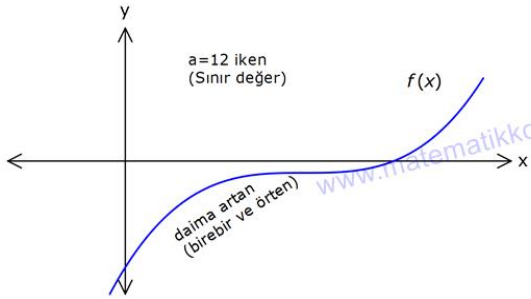
$144-12a\le 0$

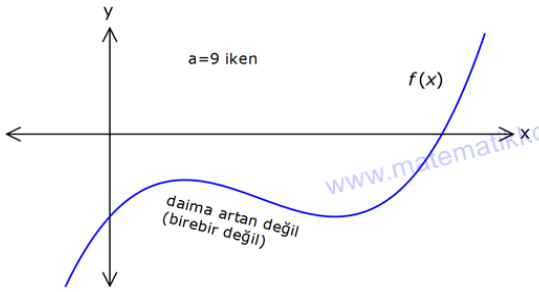
$144\le 12a$

$12\le a \Rightarrow [12,\infty)$ aralığında olmalıdır.

Merak ederseniz, fonksiyonun grafiğine aşağıdan bakabilirsiniz:







www.matematikkolay.net

Maksimum Minimum Problemleri

Maksimum-minimum problemlerinde ilk önce istenen ifade, bir değişkene göre fonksiyon olarak yazılır.

Daha sonra türevi 0'a eşitlenerek maksimum ya da minimum değeri verecek değişkenin kaç olduğu bulunur.

Örnek:

$2x+y=6$ olduğuna göre, x.y çarpımının en büyük değeri kaçtır?

Çözüm:

$2x+y=6$ verilmiş.

$y=6-2x$ tir.

O halde, $x.y=x.(6-2x)=6x-2x^2$ olarak yazabiliriz.

Türevini 0'a eşitleyelim.

$6-4x=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$ dir.

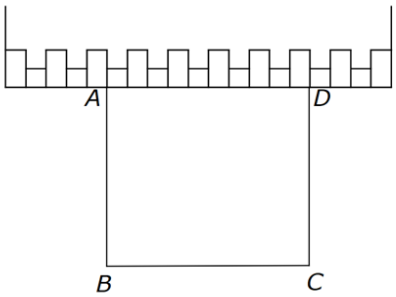
x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	∞
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗		↘

Yerel maksimum

$x=\frac{3}{2}$ için x.y çarpımı en büyük değerini alacktır.

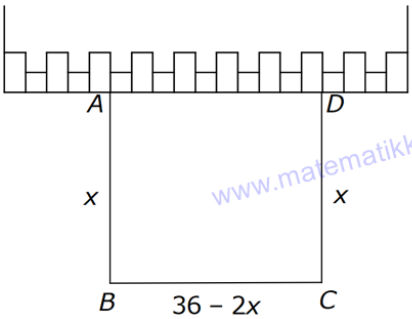
$6x-2x^2=6\cdot\frac{3}{2}-2\cdot\frac{9}{4}=9-\frac{9}{2}=\frac{9}{2}$ buluruz.

Örnek:



Şekildeki ABCD dikdörtgeninin bir kenarı duvar tarafından, diğer 3 kenarı ise 36 cm uzunluğunda bir ip ile oluşturulmuştur. Buna göre, ABCD dikdörtgeninin alanı maksimum kaç cm^2 olur?

Çözüm:



$|AB|=x$ dersek, $|DC|=x$ olur.

$|BC|=36-2x$ kalır.

$A(ABCD)=x.(36-2x)$

$=36x-2x^2$ cm^2 dir.

Türevini 0'a eşitleyelim.

$36-4x=0$

$x=9$ cm dir.

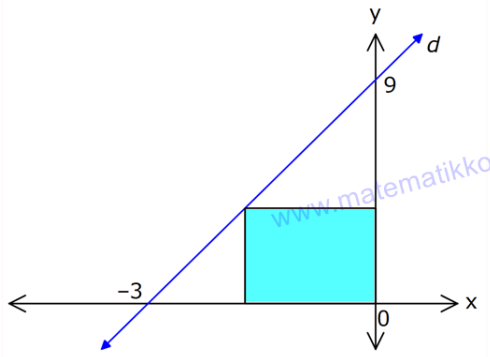
x	$-\infty$	9	∞
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	↗		↘

Yerel maksimum

$x=9$ için en büyük değerini alacktır.

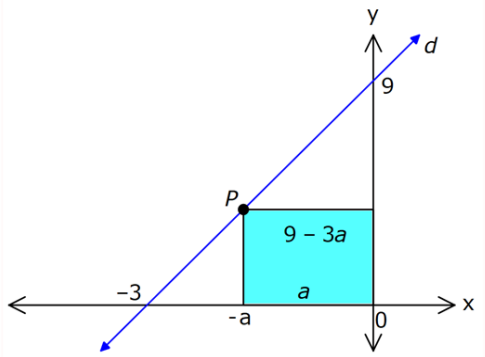
$36x-2x^2=36.9-2.81=324-162=162$ cm^2 buluruz.

Örnek:



Yukarıdaki şekilde, d doğrusu ve eksenler arasında bir dikdörtgen oluşturulacaktır. Bu dikdörtgenin alanı en fazla kaç br^2 olur?

Çözüm:



İlk önce doğrunun denklemini yazalım.

$$\frac{x}{\underset{(-3)}{-3}}+\frac{y}{9}=1$$

$$\frac{-3x+y}{9}=1$$

$-3x+y=9$ dur.

a pozitif bir reel sayı olmak üzere, P'nin apsisi $-a$ olsun. Ordinatını bulalım.

$-3(-a)+y=9$

$3a+y=9$

$y=9-3a$ dır.

Dikdörtgenin alanı $=a(9-3a)=9a-3a^2$ dir.

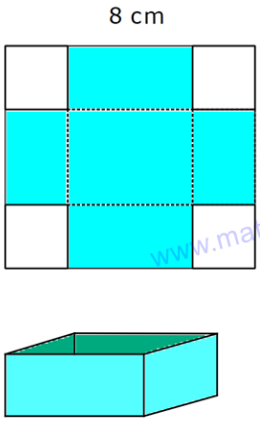
Türevini 0'a eşitleyelim.

$9-6a=0 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$ dir.

$a=\frac{3}{2}$ değerini yazalım.

$9a-3a^2=\frac{27}{2}-3\cdot\frac{9}{4}=\frac{27}{2}-\frac{27}{4}=\frac{27}{4}$ br^2 buluruz.

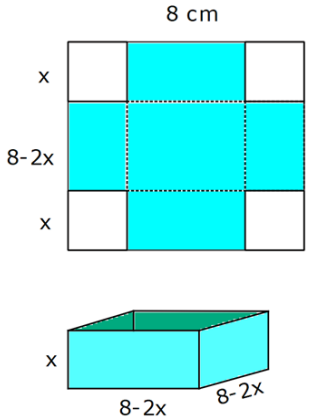
Örnek:



Kenarları 8 er cm olan bir karenin dört köşesinden eş kare parçalar kesilerek üstü açık kare dik prizma şeklinde bir kutu yapılıyor.

Buna göre, kutunun hacmi en fazla kaç cm^3 olur?

Çözüm:



Eş karelerin her bir kenarına x cm dersek, kutunun ayrıtları $\Rightarrow$ x, $(8-2x)$ ve $(8-2x)$ şeklinde olur.

Hacim $=x(8-2x)^2$ dir.

Maksimum değer için türevini 0 a eşitleyelim.

$(8-2x)^2+x.2.(8-2x).(-2)=0$

$(8-2x)^2-4x.(8-2x)=0$

$(8-2x)(8-2x-4x)=0$

$(8-2x)(8-6x)=0$

$x=4$ ve $x=\frac{4}{3}$ tür.

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		4		∞
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	
			Yerel maksimum		Yerel minimum		

$x=\frac{4}{3}$ olursa hacim maksimum olur.

$$\text{Hacim}=\frac{4}{3}\cdot\left(8-2\cdot\frac{4}{3}\right)^2=\frac{4}{3}.\left(8-\frac{8}{3}\right)^2$$

$$=\frac{4}{3}.\left(\frac{16}{3}\right)^2$$

$$=\frac{4}{3}.\frac{256}{9}$$

$$=\frac{1024}{27}\ cm^3$$ buluruz.

www.matematikkolay.net