

**Sinüs ve Kosinüs Toplam Fark Formülleri**

$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

**Örnek:**

$$\begin{aligned} \sin(30^\circ + 45^\circ) &= \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \text{ tür.} \end{aligned}$$

**Örnek:**

$\sin(15^\circ)$  kaçtır?

**Çözüm:**

$$\begin{aligned} \sin(45^\circ - 30^\circ) &= \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 30^\circ \cdot \cos 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ tür.} \end{aligned}$$

**Örnek:**

$\cos 85^\circ \cdot \cos 25^\circ + \sin 85^\circ \cdot \sin 25^\circ$  kaçtır?

**Çözüm:**

Tüm ifade kosinüs fark formülüne uygun yazılmıştır. O halde,

$$\cos(85^\circ - 25^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \text{ dir.}$$

**Örnek:**

$\cos(75^\circ)$  kaçtır?

**Çözüm:**

$$\begin{aligned} \cos(45^\circ + 30^\circ) &= \cos 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \text{ tür.} \end{aligned}$$

**Tanjant ve Kotanjant Toplam Fark Formülleri**

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

$$\cot(a \mp b) = \frac{1}{\tan(a \mp b)}$$

**Örnek:**

$\tan(105^\circ)$  kaçtır?

**Çözüm:**

$$\begin{aligned} \tan(60^\circ + 45^\circ) &= \frac{\tan 60^\circ + \tan 45^\circ}{1 - \tan 60^\circ \cdot \tan 45^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} + 1}{1 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{4 + 2\sqrt{3}}{-2} \\ &= -2 - \sqrt{3} \text{ tür.} \end{aligned}$$

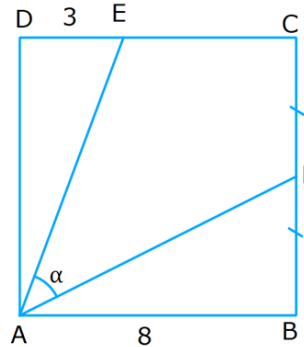
**Örnek:**

$\tan(15^\circ)$  kaçtır?

**Çözüm:**

$$\begin{aligned} \tan(60^\circ - 45^\circ) &= \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \cdot \tan 45^\circ} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{(\sqrt{3} + 1)} \\ &= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} \\ &= 2 - \sqrt{3} \text{ tür.} \end{aligned}$$

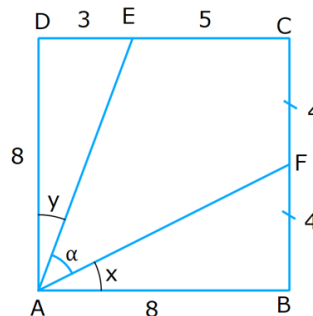
**Örnek:**



ABCD kare

$\cot \alpha = ?$

**Çözüm:**



$$\tan x = \frac{4}{8} \text{ ve } \tan y = \frac{3}{8} \text{ dir.}$$

$$\tan(x+y) = \frac{\frac{4}{8} + \frac{3}{8}}{1 - \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{8}} = \frac{\frac{7}{8}}{1 - \frac{3}{16}} = \frac{\frac{7}{8}}{\frac{13}{16}} = \frac{7}{8} \cdot \frac{16}{13} = \frac{14}{13} \text{ tür.}$$

$$x+y = 90 - \alpha \text{ dir.}$$

$$\text{O halde, } \tan(90 - \alpha) = \frac{14}{13} \text{ tür. Yani, } \cot \alpha = \frac{14}{13} \text{ tür.}$$

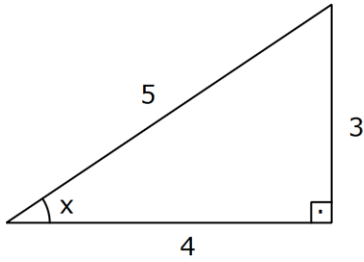
### İki Kat Açılı (Yarım Açılı) Formülleri

$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x \text{ tir.}$$

#### Örnek:

$$x \text{ dar açılı ve } \sin x = \frac{3}{5} \text{ ise } \sin 2x \text{ kaçtır?}$$

#### Çözüm:



$$\sin 2x = 2 \cdot \sin x \cdot \cos x$$

$$= 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5}$$

$$= \frac{24}{25} \text{ tir.}$$

#### Not:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \text{ tir. veya}$$

$$= 2\cos^2 x - 1 \text{ dir. veya}$$

$$= 1 - 2\sin^2 x$$

(Bu üç formül de yerine göre kullanışlıdır.)

#### Örnek:

$$\cos a = \frac{1}{3} \text{ ise } \cos 2a \text{ kaçtır?}$$

#### Çözüm:

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{9} - 1$$

$$= \frac{2}{9} - 1$$

$$= -\frac{7}{9} \text{ dur.}$$

#### Not:

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}, \quad \cot 2x = \frac{1 - \tan^2 x}{2 \tan x} \text{ tir.}$$

#### Örnek:

$$\tan x = \frac{1}{3} \text{ ise } \tan 2x \text{ kaçtır?}$$

#### Çözüm:

$$\tan 2x = \frac{2 \cdot \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{8} = \frac{3}{4} \text{ tür.}$$

#### Örnek:

$$\cot 22,5^\circ \text{ kaçtır?}$$

#### Çözüm:

$$\tan 45^\circ = \frac{2 \tan 22,5^\circ}{1 - \tan^2 22,5^\circ} \quad \tan 22,5^\circ = x \text{ olsun.}$$

$$1 = \frac{2x}{1 - x^2}$$

$$1 - x^2 = 2x$$

$$0 = x^2 + 2x - 1$$

$$0 = x^2 + 2x + 1 - 2$$

$$0 = (x+1)^2 - 2$$

$$2 = (x+1)^2 \quad \tan 22,5^\circ \text{ pozitifdir.}$$

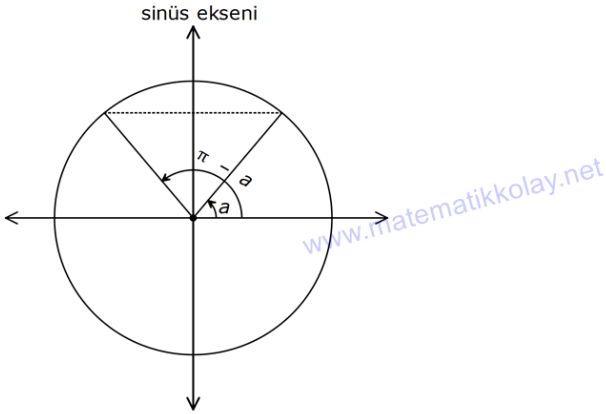
$$\sqrt{2} = x+1$$

$$\sqrt{2} - 1 = x \text{ tir.}$$

$$\cot 22,5^\circ = \frac{1}{\tan 22,5^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \frac{\sqrt{2} + 1}{1} = \sqrt{2} + 1 \text{ dir.}$$

**Trigonometrik Denklemler**

$$\sin x = \sin a \Rightarrow x = a + \underbrace{2k\pi}_{360^\circ \cdot k} \vee x = \pi - a + \underbrace{2k\pi}_{360^\circ \cdot k} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



**Örnek:**

$\sin 3x = \frac{1}{2}$  denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

**Çözüm:**

Sinüsü  $\frac{1}{2}$  olan açılardan birini yazalım.

İlk akla gelen  $\frac{\pi}{6}$  yı ( $30^\circ$  yi) yazabiliriz.

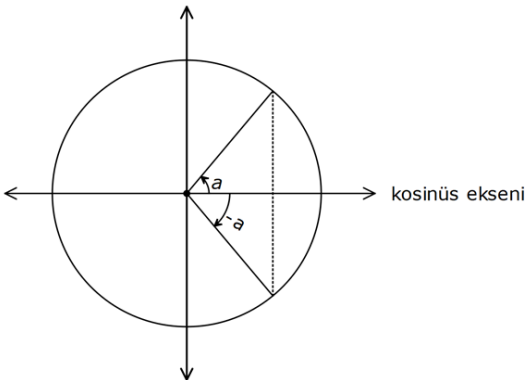
$$\Rightarrow 3x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee 3x = \underbrace{\pi - \frac{\pi}{6}}_{\frac{5\pi}{6}} + 2k\pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \text{ olur.}$$

$$\text{Ç.K} = \left\{ x : x = \frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3} \vee x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ dir.}$$

**Not:**

$$\cos x = \cos a \Rightarrow x = a + \underbrace{2k\pi}_{360^\circ \cdot k} \vee x = -a + \underbrace{2k\pi}_{360^\circ \cdot k} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



**Örnek:**

$\cos 5x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  denkleminin  $[0, 360^\circ)$  aralığındaki köklerini bulunuz.

**Çözüm:**

Kosinüsü  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  olan açılardan birini yazalım.

İlk akla gelen  $\frac{\pi}{6}$  yı ( $30^\circ$  yi) yazabiliriz.

$$\Rightarrow 5x = 30^\circ + 360^\circ \cdot k \vee 5x = -30^\circ + 360^\circ \cdot k$$

$$\Rightarrow x = 6^\circ + 72^\circ \cdot k \vee x = -6^\circ + 72^\circ \cdot k \text{ olur.}$$

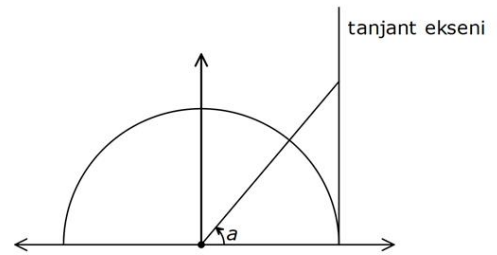
$x = 6^\circ, 78^\circ, 150^\circ, 222^\circ, 294^\circ$  veya

$x = 66^\circ, 138^\circ, 210^\circ, 282^\circ, 354^\circ$  dir.

(10 farklı kökü vardır.)

**Not:**

$$\tan x = \tan a \Rightarrow x = a + \underbrace{k\pi}_{180^\circ \cdot k}, k \in \mathbb{Z}$$



tanjantın periyodu  $\pi$  dir.

**Örnek:**

$\tan 6x = 1$  denkleminin  $[0, 2\pi)$  aralığında kaç kökü vardır?

**Çözüm:**

tanjantı 1 olan açılardan birini yazalım.

İlk akla gelen  $\frac{\pi}{4}$  ü ( $45^\circ$  yi) yazabiliriz.

$$\Rightarrow 6x = \frac{\pi}{4} + \pi \cdot k$$

$$\Rightarrow 6x = \frac{\pi + 4\pi k}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi + 4\pi k}{24}$$

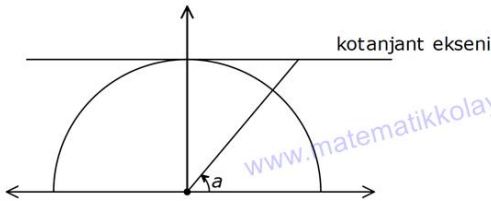
$[0, 2\pi)$  aralığındaki kökleri

$$\frac{\pi}{24}, \frac{5\pi}{24}, \frac{9\pi}{24}, \frac{13\pi}{24}, \frac{17\pi}{24}, \frac{21\pi}{24}, \frac{25\pi}{24}, \frac{29\pi}{24}, \frac{33\pi}{24}, \frac{37\pi}{24}, \frac{41\pi}{24}, \frac{45\pi}{24} \text{ tür.}$$

$\Rightarrow 12$  tane kökü vardır.

**Not:**

$$\cot x = \cot a \Rightarrow x = a + \frac{k\pi}{180^\circ \cdot k}, \quad k \in \mathbb{Z}$$



kotanjantın periyodu  $\pi$  dir.

**Örnek:**

$\cot 5x = \tan 3x$  denkleminin  $[0, \pi)$  aralığındaki köklerini bulunuz.

**Çözüm:**

$$\cot 5x = \cot\left(\frac{\pi}{2} - 3x\right) \text{ olarak yazabiliriz.}$$

$$5x = \frac{\pi}{2} - 3x + k\pi$$

$$8x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$8x = \frac{\pi + 2k\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi + 2k\pi}{16} \text{ dir.}$$

$[0, \pi)$  aralığındaki kökleri

$$\frac{\pi}{16}, \frac{3\pi}{16}, \frac{5\pi}{16}, \frac{7\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, \frac{11\pi}{16}, \frac{13\pi}{16}, \frac{15\pi}{16} \text{ dir.}$$

$\Rightarrow 8$  tane kökü vardır.

**Sinüs ve Kosinüse Göre Doğrusal (Linear) Denklemler**

$a, b$  ve  $c$  sıfırdan farklı birer reel sayı olmak şartıyla  $a \sin x + b \cos x = c$  şeklindeki denklemler, sinüs ve kosinüse göre doğrusal denklemlerdir.

$c^2 \leq a^2 + b^2$  eşitsizliğini sağladığı sürece çözüm kümesi vardır.

$a \sin x + b \cos x = c$  denkleminde her tarafı  $a$ 'ya bölünce

$$\sin x + \frac{b}{a} \cdot \cos x = \frac{c}{a} \text{ olur. } \left( \tan \alpha = \frac{b}{a} \text{ dersek} \right)$$

$$\sin x + \tan \alpha \cdot \cos x = \frac{c}{a}$$

$$\sin x + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \cos x = \frac{c}{a}$$

$$\frac{\sin x \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \cdot \cos x}{\cos \alpha} = \frac{c}{a}$$

$$\frac{\sin(x + \alpha)}{\cos \alpha} = \frac{c}{a} \text{ denklemini çözerek ilerleyebiliriz.}$$

**Örnek:**

$3 \sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{3}$  denkleminin  $[0, 360^\circ)$  aralığındaki köklerini bulunuz.

**Çözüm:**

$$3\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{3} \quad \text{ise her tarafı 3'e bölelim.}$$

$$\sin x + \underbrace{\frac{\sqrt{3}}{3}}_{\substack{\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \text{olsun.}}} \cdot \cos x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{tür.}$$

(Bu durumda  $\alpha = 30^\circ$  dir, diyebiliriz.)

$$\sin x + \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} \cdot \cos x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\frac{\sin x \cdot \cos 30^\circ + \sin 30^\circ \cdot \cos x}{\cos 30^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sin(x + 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cos 30^\circ$$

$$\sin(x + 30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(x + 30^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(x + 30^\circ) = \sin 30^\circ$$

$$x + 30^\circ = 30^\circ + 360^\circ \cdot k \quad \vee \quad x + 30^\circ = 150^\circ + 360^\circ \cdot k$$

$$x = 0^\circ + 360^\circ \cdot k \quad \vee \quad x = 120^\circ + 360^\circ \cdot k$$

[0, 360°) aralığındaki kökleri 0° ve 120° dir.

**Birinci Dereceden Homojen Trigonometrik Denklem**

a, b sıfırdan farklı birer reel sayı olmak şartıyla  $a\sin x + b\cos x = 0$  şeklindeki denklemlere birinci dereceden homojen trigonometrik denklem denir.

$a\sin x + b\cos x = 0$  denkleminde her taraf  $\cos x$  e bölününce ( $\cos x \neq 0$ )

$$a \cdot \tan x + b = 0$$

$$a \cdot \tan x = -b$$

$$\tan x = -\frac{b}{a} \quad \text{denklemini çözümlerle ilerleyebiliriz.}$$

**Örnek:**

$3\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$  denkleminin [0,  $\pi$ ) aralığındaki köklerini bulunuz.

**Çözüm:**

$$3\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0 \quad \cos x \text{ e bölelim.}$$

$$3\tan x - \sqrt{3} = 0$$

$$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad \text{dir.}$$

[0,  $\pi$ ) aralığındaki kökü  $\frac{\pi}{6}$  dir.

[www.matematikkolay.net](http://www.matematikkolay.net)