Dizi Kavramı

Tanım kümesi pozitif tam sayılar olan her fonksiyona **dizi** denir. Yani (a_n) dizisinde n sayısı 1 den başlar.

1.terim $\Rightarrow a_1$

2.terim $\Rightarrow a_2$

...

n.terim $\Rightarrow a_n$ dir.

Not: Gerçek sayı dizisinin tanım kümesi Z^+ dır.

Örnek:

$\frac{5}{n-4}$ de n yerine 4 yazamayız. Bu sebeple dizi belirtmez.

$\frac{11}{n^2+1}$ de n yerine rahalıkla 1, 2, 3, ... gibi pozitif tam sayıları yazabiliriz. Dolayısıyla bir dizi belirtir.

Not: n'ye bağlı olmayan, her terimi eşit olan diziye sabit dizi denir.

Örnek:

$(a_n)=5 \quad \Rightarrow$ Her terimi 5 tir.

Not:

Kesirli bir ifadenin sabit olması için, aynı dereceli terimlerin katsayıları arasındaki oran birbirine eşit olmalıdır.

$\frac{an+b}{cn+d}=k$ sabit ise $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$ dir.

Not: Eşit dizilerin genel terimleri birbirine eşittir.

Örnek:

$(a_n)=3n+y$ ve $(b_n)=xn+5$ olsun.

$(a_n)=(b_n)$ ise $x=3$ ve $y=5$ tir.

Not: Bir terimin, kendinden önceki terimlerle ifade edildiği dizilere indirgemeli diziler denir.

Örnek: $a_{n+1}=a_n+4$

Not: Dizilerin genel terimleriyle 4 işlem yapılabilir.

Örnek:

$(a_n)=6-n^2$ ve $(b_n)=n^3+3n^2+5$ olsun.

$(a_n)+(b_n)=n^3+2n^2+11$ dir.

Not:

1 den n'ye kadar olan sayıların toplamı şeklinde ifade edilen sayılara **üçgensel sayılar** denir.

Bu dizinin genel terimi $\frac{n(n+1)}{2}$ dir.

$\Rightarrow 1,\ \underbrace{3}_{1+2},\ \underbrace{6}_{1+2+3},\ \underbrace{10}_{1+2+3+4},\ \underbrace{15}_{1+2+3+4+5},\ ...$

1, 4, 9, ... tam kare sayılar şeklinde giden sayılara da **kare sayılar** denir. Bu dizinin genel terimi de n^2 dir.

Ayrıca, ardışık iki üçgensel sayının toplamı bir kare sayıdır.

Örnek: $\underbrace{6+10}_{\text{ardışık üçgen sayılar}}=\underbrace{16}_{\text{kare sayı}}$

ARİTMETİK DİZİLER

Ardışık iki terimi arasındaki farkın eşit olduğu dizilere aritmetik diziler denir.

$a_{n+1}-a_n=\underbrace{d}_{\text{ortak fark}}$ yazabiliriz.

Genel terimi $\Rightarrow a_n=a_1+(n-1).d$ dir.

Örnek:

$(a_n)=1,\ 4,\ 7,\ 11,\ ...,\ -2+3n\ ,\ ...$ bir aritmetik dizidir.
Ardışık iki terimi arasındaki fark eşittir (3).

Not: Bir aritmetik dizide x. ve y. terimleri biliyorsak, ortak farkı şu şekilde hesaplayabiliriz.

Örnek: $a_5=6$ ve $a_7=10$ olsun.

$$d=\frac{a_7-a_5}{7-5}=\frac{10-6}{2}=\frac{4}{2}=2 \text{ dir.}$$

Not: Bir aritmetik dizide ortak farkı biliyorsak, y.terimi x.terimden bulabiliriz.

$a_y=a_x+(y-x).d$ dir.

Örnek: $a_{100}=212$ ve $d=5$ olsun. $a_{106}=?$

$$a_{106}=212+(106-100).5$$
$$=212+30$$
$$=242 \text{ dir.}$$

Not : Aritmetik dizide bir terim, kendinden eşit uzaklıktaki iki terimin aritmetik ortalamasına eşittir.

$$a_n = \frac{a_{n-p} + a_{n+p}}{2}$$

Veya şu şekilde de yazabiliriz: $a_{n-p} + a_{n+p} = 2a_n$ dir.

Örnek : $a_4 = 10$ ve $a_8 = 12$ olsun.

$$a_6 = \frac{10+12}{2} = 11 \text{ dir.}$$

Not : Sonlu bir aritmetik dizide, baştan ve sondan eşit uzaklıkta bulunan terimlerin toplamı birbirine eşittir. $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = ...$

Ayrıca indisleri toplamı eşit olan iki terimin toplamı da birbirine eşittir.

$x + y = p + k$ ise $\Rightarrow a_x + a_y = a_p + a_k$ dır.

Örnek : $a_{100} + a_5 = a_{95} + a_{10}$ dur.

Not : Aritmetik dizide ilk n terim toplamı

$$S_n = \frac{n}{2}\left[a_1 + a_n\right] \text{ dir.}$$

a_n yerine $a_1 + (n-1)d$ yazarak formülü değiştirebiliriz.

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a_1 + (n-1)d\right] \text{ olur.}$$

Örnek :

$1+5+9+13+17=?$

$$\left.\begin{array}{l}\text{İlk terim} = 1\\ \text{Ortak farkı} = 4\\ \text{Terim sayısı} = 5\end{array}\right\} \frac{5}{2}\left[2.1+(5-1).4\right] = \frac{5}{2}\left[2+16\right] = 45$$

Not : Ardışık sayılarda,

$$\text{Terim Sayısı} = \frac{\text{Son Terim} - \text{İlk Terim}}{\text{Artış Miktarı}} + 1 \text{ dir.}$$

GEOMETRİK DİZİLER

Ardışık iki terimi arasındaki oranın eşit olduğu dizilere geometrik diziler denir.

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \underbrace{r}_{\text{ortak çarpan}}$ yazabiliriz.

Genel terimi $\Rightarrow a_n = a_1.r^{n-1}$ dir.

Örnek : 1, 3, 9, 27, 81, 243, 3^n, ...

Not :

Bir geometrik dizide, p. ve k. terimler arasında

$a_p = a_k.r^{p-k}$ bağıntısı vardır.

Örnek : $a_{12} = a_5.r^7$ dir.

Not : Geometrik dizide bir terimin karesi, kendinden eşit uzaklıktaki iki terimin çarpımına eşittir.

$$\left(a_p\right)^2 = a_{p-k}.a_{p+k} \text{ dır.}$$

Örnek : $(a_5)^2 = a_2.a_8$ dir.

Not : Sonlu bir geometrik dizide, baştan ve sondan eşit uzaklıkta bulunan terimlerin çarpımı birbirine eşittir. $a_1 \cdot a_n = a_2 \cdot a_{n-1} = a_3 \cdot a_{n-2} = ...$

Ayrıca indisleri toplamı eşit olan iki terimin çarpımı da birbirine eşittir.

$x + y = p + k$ ise $\Rightarrow a_x \cdot a_y = a_p \cdot a_k$ dır.

Örnek : $a_9.a_{11} = a_8.a_{12}$ dir.

Not : Geometrik dizide ilk n terim toplamı

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-r^n}{1-r} \text{ dir.} \qquad (r \neq 1)$$

Örnek : $1+2+4+8+16+32=?$

$$\left.\begin{array}{l}\text{İlk terim} = 1\\ \text{Ortak çarpan} = 2\\ \text{Terim sayısı} = 6\end{array}\right\} 1 \cdot \frac{1-2^6}{1-2} = \frac{-63}{-1} = 63 \text{ tür.}$$

TOPLAM SEMBOLÜ

$a_1+a_2+a_3+...+a_n$ toplamını $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ olarak ifade edebiliriz.

$$\sum_{k=\underbrace{1}_{\text{Alt sınır}}}^{\overbrace{n}^{\text{Üst Sınır}}} \overbrace{a_{\underbrace{k}_{\text{indis}}}}^{\text{Dizinin kuralı}} \quad \left(\begin{array}{l} k=1 \text{ den } n\text{'e kadar } a_k \text{ terimlerinin} \\ \text{toplamıdır.} \end{array}\right)$$

Mesela $\sum\limits_{k=1}^{5} 2k = 2+4+6+8+10$ dur.

Not :

Geometrik dizilerde ortak çarpan $|r|<1$ olursa, bu dizinin toplamı gerçek bir sayıya yakınlaşır.

n sonsuza gittikçe,

$$\sum_{k=1}^{n} a_1 . r^{k-1} = \frac{1-\overbrace{r^n}^{\text{0'a yakınlaşır}}}{1-r} = \frac{a_1}{1-r} \text{ olur.}$$

Örnek : $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k = ?$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1 \text{ olur.}$$

Fibonacci

İlk iki terimi 1 olup; daha sonraki her terimin, kendinden önceki iki terimin toplamı şeklinde olan diziye **Fibonacci dizisi** denir.

Parçalı fonksiyon olarak aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$F_n = \begin{cases} 1 & n=1, n=2 \\ F_{n-1}+F_{n-2} & n>2 \end{cases}$$

Buna göre, Fibonacci dizisini açarak yazalım.

1, 1, 2, 3, 5, 8, 12, 21, 34, 55, 89, ... şeklindedir.