Sanal (İmajiner) Sayı Birimi

$i=\sqrt{-1}$ olmak üzere, "i" sayısına, sanal (imajiner) sayı birimi denir.

i sayısının karesi $\Rightarrow i^2=-1$ dir.

Örnek:

$\sqrt{-4}+\sqrt{-16}=?$

Çözüm:

$\sqrt{4}\sqrt{-1}+\sqrt{16}\sqrt{-1}=2i+4i=6i$ dir.

Not:

Karekökün içinde negatif sayılar varsa, ilk önce i'li formata dönüştürülür. Sonra işlem yapılır.
Bu dönüşüm yapılmazsa, hatalı sonuç elde edebilirsiniz.

Örnek:

$\sqrt{-4}.\sqrt{-16}=?$

Çözüm:

$\sqrt{-4}.\sqrt{-16}=\sqrt{4}\sqrt{-1}.\sqrt{16}.\sqrt{-1}=2i.4i=8.i^2=-8$ dir.

$\boxed{\textbf{Not:}\ \sqrt{-4}.\sqrt{-16}\neq\sqrt{(-4).(-16)}}$

Not:
i sayısının karesi $\Rightarrow i^2=-1$ dir.
Bu sebeple,
-1'in yerine i^2 yazarak işlem yapabiliriz.

Örnek:

$x^2+9=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

Çözüm:

$x^2=-9 \Rightarrow x^2=9i^2$ yazabiliriz

$\Rightarrow x=3i$ veya $x=-3i$ dir.

Ç.K $=\{-3i,\ 3i\}$ dir.

Örnek:

$x^4+25x^2=0$ denkleminin kaç farklı kökü vardır?

Çözüm:

$\underbrace{x^2}_{x^2=0}\underbrace{(x^2+25)}_{x^2=-25}=0$

$\Rightarrow x^2=0$ ın kökü $x=0$ dır.

$\Rightarrow x^2=-25 \Rightarrow x^2=25i^2 \Rightarrow x=-5i$ veya $x=5i$ dir.

$\Rightarrow$ 3 farklı kök vardır.

Örnek:

$x^2-2x+11=0$ denkleminin köklerini diskiriminant kullanarak bulunuz.

Çözüm:

$\Delta=b^2-4ac=(-2)^2-4.1.11=4-44=-40$ tır.

$\Delta<0$ olduğu için reel kökü yoktur.

Ancak i sayısını kullanarak karmaşık köklerini bulabiliriz.

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{2-\sqrt{-40}}{2}=\frac{2-\sqrt{40}\sqrt{-1}}{2}=\frac{2-2\sqrt{10}.i}{2}$$
$$=1-\sqrt{10}\ i \text{ dir.}$$

Diğer kökü de $x_2=1+\sqrt{10}$ i dir.

i'nin Kuvvetleri

$i^1=i$

$i^2=-1$

$i^3=-i$ $\quad (i^3=i^2.i=-1.i=-i$ dir.)

$i^4=1$ $\quad (i^4=i^2.i^2=(-1)(-1)=1$ dir.)

i'nin kuvvetleri her 4'te bir kendini tekrarlar. Yüksek dereceden bir kuvvet verilmişse, onun 4 ile bölümünden kalana bakmamız yeterlidir.

Örnek:

$i^{102}+i^{103}=?$

Çözüm:

102'nin 4 ile bölümünden kalan 2 dir.

$i^{102}=i^2=-1$ dir.

103'ün 4 ile bölümünden kalan 3 tür.

$i^{103}=i^3=-i$ dir.

İkisinin toplamı da $-1-i$ dir.

Not: Ardışık 4 kuvvetin toplamı 0 dır.

$i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$ dır.

Örnek: $i + i^2 + i^3 + i^4 = i - 1 - i + 1$

$= 0$ dır.

Örnek:

$i^{13} + i^{14} + i^{15} + ... + i^{82} = ?$

Çözüm:

Terim Sayısı $= \dfrac{82-13}{1} + 1 = 70$ dir.

70'in 4 ile bölümünden kalan 2 dir.

Son 2 terim hariç diğerlerinin toplamı 0 olacaktır.

$$\underbrace{i^{13} + i^{14} + i^{15} + i^{16} ... + i^{80}}_{0} + i^{81} + i^{82} = i^{81} + i^{82}$$

$$= i^1 + i^2$$

$$= i - 1$$

$$= -1 + i \text{ dir.}$$

Not: Eğer i'nin kuvveti negatif tam sayı ise, üstüne 4'ün katları eklenerek neye eşit olduğu bulunabilir.

Örnek:

$i^{-83} + i^{83} = ?$

Çözüm:

-83'e $\underset{\text{4'ün katı}}{84}$ ekleyelim.

$i^{-83} = i^1 = i$ dir.

83'ün 4 ile bölümünden kalan 3 tür.

$i^{83} = i^3 = -i$ dir.

İkisinin toplamı

$i + (-i) = 0$ dır.

Karmaşık Sayılar Kümesi

a ve b sayıları gerçek sayılar, $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere **$a + ib$** biçimindeki sayılara **karmaşık sayılar** denir.

$z = a + ib$ olmak üzere,

$a \Rightarrow$ karmaşık sayının gerçek (reel) kısmıdır.

$b \Rightarrow$ karmaşık sayının sanal (imajiner) kısmıdır.

$Re(z) = a$ ve $İm(z) = b$ biçiminde de gösterebiliriz.

Karmaşık sayılar kümesi $\mathbb{C}$ ile gösterilir.

Karmaşık sayılar kümesi, reel sayıları da kapsar.

Çünkü $a + 0i$ şeklinde tüm reel sayılar gösterilebilir.

Örnek:

$z = 2 - 3i$ olmak üzere $Re(z) + İm(z)$ kaçtır?

Çözüm:

$z = \underset{\text{reel}}{2} \; \underset{\text{imajiner}}{-3} \, i$

$Re(z) + İm(z) = 2 - 3 = -1$ dir.

Örnek:

$z = \dfrac{3-5i}{2}$ olmak üzere $Re(z) = ?$ $İm(z) = ?$

Çözüm:

$z = \dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{2}i \Rightarrow Re(z) = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow İm(z) = -\dfrac{5}{2}$ dir.

Örnek:

$\sqrt{9} + \sqrt{-9}$ sayısının reel kısmı ile imajiner kısmının toplamı kaçtır?

Çözüm:

$\sqrt{9} + \sqrt{9}.\sqrt{-1} = 3 + 3i$ dir

$\left.\begin{array}{l} \text{Reel kısmı} = 3 \\ \text{İmajiner kısmı} = 3 \end{array}\right\}$ Toplamları 6 dır.

Karmaşık Sayıların Eşitliği

İki karmaşık sayının eşit olması için reel ve imajiner kısımların ayrı ayrı eşit olması gerekir.

Örnek:

$z_1 = a + 2i$

$z_2 = 3 - bi$ olmak üzere,

$z_1 = z_2$ ise a.b çarpımı kaçtır?

Çözüm:

$\left.\begin{array}{l} z_1 = \underset{3}{a} + 2i \\ z_2 = 3 - \underset{-2}{b}\, i \end{array}\right\}$ $a = 3$ ve $b = -2$ olmalıdır.

$a.b = 3.(-2) = -6$ buluruz.

Örnek:

$x+2+3i-yi+6=0$ ise $x+y$ kaçtır?

Çözüm:

Reel kısım ile sanal kısmı ayıralım.

$$\underbrace{x+2+6}_{\text{Burası 0 olmalı}} + \underbrace{(3-y)\,i}_{\text{Burası da 0 olmalı}}=0$$

$x=-8$ dir.

$y=3$ tir.

$x+y=-8+3=-5$ buluruz.

Karmaşık Sayılarda Toplama Çıkarma

Reel kısımlar kendi arasında, imajiner kısımlar da kendi arasında toplanır ve çıkarılır.

Örnek:

$z_1=3+2i$ ve $z_2=2-i$ olduğuna göre,

z_1+z_2 toplamı kaçtır?

Çözüm:

$$\begin{aligned}3+2i+2-i&=3+2+2i-i\\&=5+i \text{ dir.}\end{aligned}$$

Örnek:

$z_1=2+3i$ ve $z_2=1-2i$ olduğuna göre,

z_1-z_2 farkı kaçtır?

Çözüm:

$$\begin{aligned}2+3i-(1-2i)&=2+3i-1+2i\\&=2-1+3i+2i\\&=1+5i \text{ dir.}\end{aligned}$$

Karmaşık Sayılarda Çarpma

Dağılma özelliğinden yararlanarak çarpma yapabiliriz.

Örnek:

$z_1=2+3i$ ve $z_2=1-2i$ olduğuna göre,

$z_1.z_2$ çarpımı kaçtır?

Çözüm:

$$\begin{aligned}(2+3i).(1-2i)&=2.1+2.(-2i)+3i.1+3i.(-2i)\\&=2-4i+3i-6\underbrace{i^2}_{-1}\\&=2-4i+3i+6\\&=2+6-4i+3i\\&=8-i \text{ dir.}\end{aligned}$$

Örnek:

$z_1=2i$

$z_2=7+i$

$z_3=1-i$ olduğuna göre, $z_1\left(z_2+z_3\right)$ kaçtır?

Çözüm:

$2i\left(7+i+1-i\right)=2i\left(8\right)=16i$ dir.

Not:

$(1+i)^2=2i$

$(1-i)^2=-2i$ dir. İşlem yaparak da bunları bulabiliriz.

$(1+i)(1+i)=1+i+i+\underbrace{i^2}_{-1}=2i$ dir.

$(1-i)(1-i)=1-i-i+\underbrace{i^2}_{-1}=-2i$ dir.

Örnek:

$$\frac{(1+i)^{10}}{(1-i)^8}=?$$

Çözüm:

$$\frac{\left((1+i)^2\right)^5}{\left((1-i)^2\right)^4}=\frac{(2i)^5}{(-2i)^4}=\frac{32i^5}{16i^4}=2i \text{ dir.}$$

Örnek:

$(1-i)^{162}=?$

Çözüm:

$\left((1-i)^2\right)^{81}=\left(-2i\right)^{81}=-2^{81}.i^{81}$

$\left(81\text{'in } 4\text{'e böl. kalan } 1 \text{ dir. } \Rightarrow i^{81}=i \text{ dir.}\right)$

$=-2^{81}i$ dir.

Karmaşık Sayının Eşleniği

a ve b birer gerçek sayı olmak üzere,

$z=a+ib$ nin eşleniği $\overline{z}=a-ib$ dir.

Yani, imajiner kısım işaret değiştirir.

Örnek:

$z=3-4i$ ise $\overline{z}=3+4i$ dir.

$z=2i-5$ ise $\overline{z}=-2i-5$ tir.

$z=4$ ise $\overline{z}=4$ tür. Sanal kısım 0 olduğu için, $-$'lisi de 0 dır.

$z=7i$ ise $\overline{z}=-7i$ dir.

Örnek:

$z=6+2i$ olduğuna göre, $Re(z)+Im(\overline{z})$ toplamı kaçtır?

Çözüm:

$z=6+2i \Rightarrow Re(z)=6$ dır.

$\overline{z}=6-2i \Rightarrow Im(\overline{z})=-2$ dir.

İkisinin toplamı 4 tür.

Örnek:

$\overline{z}+3z=16+2i$ olduğuna göre, z yi bulunuz.

Çözüm:

$z=a+bi$ olsun. $\Rightarrow \overline{z}=a-bi$ olur.

Denklemde yerine yazarsak,

$a-bi+3(a+bi)=16+2i$

$a-bi+3a+3bi=16+2i$

$4\underbrace{a}_{4}+2\underbrace{b}_{1}i=16+2i$

$z=a+bi \Rightarrow z=4+i$ dir.

Not: Karmaşık sayının eşleniğinin eşleniği kendisine eşittir.

$\overline{(\overline{z})}=z$ dir.

Örnek:

$\overline{(\overline{z})}+\overline{z}+z=9-2i$ olduğuna göre z kaçtır?

Çözüm:

$z=a+bi$ olsun.

$\overline{(\overline{z})}+\overline{z}+z=9-2i$ denkleminde yerine yazarsak,

$a+bi+a-bi+a+bi=9-2i$

$3\underbrace{a}_{3}+\underbrace{b}_{-2}i=9-2i$

$z=3-2i$ dir.

Not: Karmaşık sayı ile eşleniğinin çarpımı, reel ve imajiner kısımlarının kareleri toplamına eşittir.

$z=a+bi$ olsun. $\Rightarrow z.\overline{z}=a^2+b^2$ dir.

Örnek:

$(3+i)(3-i)=?$

Çözüm:

$(3-i)(3+i)=3^2+1^2=9+1=10$ dur.

Not: Eğer paydada karmaşık sayı varsa, paydayı reel yapmak için eşlenikle çarparız.

Örnek:

$$\frac{6}{1-i}=?$$

Çözüm:

$$\frac{6}{\underset{(1+i)}{1-i}}=\frac{6+6i}{1^2+1^2}=\frac{6+6i}{2}=3+3i \text{ dir.}$$

Not: (Kökler Karmaşık Sayı ise)

Gerçek katsayılı ikinci dereceden bir denklemin köklerinden biri $a+bi$ ise diğer kökü $a-bi$ dir.

Yani eşleniğidir.

Örnek:

Köklerinden biri $3-i$ olan gerçek katsayılı ikinci dereceden denklemi bulunuz.

Çözüm:

Diğer kökü $3+i$ dir.

Kökler toplamı $=3-i+3+i=6$ dır.

Kökler çarpımı $=(3-i)(3+i)=9+1=10$ dur.

O halde, bu denklem

$x^2-6x+10=0$ dır.